Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики
Направление «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
Кафедра информационных технологий

Курсовая работа
по дисциплине
«Кратные интегралы и ряды»

на тему
«Исследование рядов (вариант 4)»

Выполнил: студент 26 группы
Варламов Антон Дмитриевич

Проверил: профессор
Климок Виктор Иванович

Тверь - 2015

Оглавление:

Задание:

Разложить в степенной ряд (теоретически доказав, что это возможно) функцию по целым неотрицательным степеням x. Указать промежуток сходимости. «Найти» сумму на ЭВМ, взяв n слагаемых разложения. Изобразить графически постепенное приближение частичных сумм ряда к функции. Функция $f(x) = e^x$.

Теоретическая часть:

Бесконечный ряд-это сумма бесконечной последовательности чисел

$a_0 , a_1 , a_2 , \dots a_n$ ... называемых *членами ряда*. Ряд записывается в виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Функциональный ряд- ряд, каждым членом которого, в отличие от числового ряда, является не число, а функция $u_k(x)$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_k(x)$$

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

где $a_0 , a_1 , a_2 , \dots a_n$ ... - постоянные, коэффициенты степенного ряда.

Частичная сумма-сумма первых н членов ряда. $A_n=a_0+a_1+\dots+a_n$

Сходящийся ряд-ряд у которого существует предел частичных сумм ряда и он конечен.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = c.\ c \neq \infty.$$

Ряд называется *абсолютно сходящимся* если сходится ряд, составленный из модулей его членов

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

Признак сходимости Даламбера:

Для ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ возьмём переменную $D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Если переменная D_n имеет конечный предел = D и если D<1, то ряд сходится. Если D>1 расходится. При D=1 поведение ряда не ясно.

Интервал сходимости степенного ряда-это такое множество чисел А, что при x∈A ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно.

Ряд Тейлора для функции f(x) в окрестности точки a –степенной ряд вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

В случае, если a=0, такой ряд также называется рядом Маклорена.

Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков в промежутке $|x-a|<R$, и существует постоянная, такая, что при любых x и n из промежутка $|x-a|<R$ удовлетворяет неравенству $|f^n(x)|<C$, то функция $f(x)$ разлагается в этом промежутке в ряд Тейлора при любом a.

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора (Маклорена) сходился на промежутке (x_0 – R, x_0 + R) (для ряда Маклорена (-R, R) соответственно) и имел своей суммой f(x) необходимо и достаточно , чтобы на (x_0 – R, x_0 + R) (для ряда Маклорена (-R, R)) остаточный член R_n(x) ряда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} * (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} * (x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} * (x-x_0)^n + R_n(x)$$

Стремился к нулю при n → ∞ т.е. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(\mathrm{x}) = 0$ при любом x ∈ (x_0–R,x0+R)

Остаточный член ряда Тейлора можно представить в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} * x^{n+1}$$

Где 0 < $\theta < 1$.

Практическая часть

1) Докажем, что функция e^x раскладывается в степенной ряд (по теореме Тейлора).

Найдём производные функции:

$$f^{(n)}(x) = e^x \text{ при } n \in N.$$

Для любого фиксированного a>0 получаем, что для всех x принадлежащих (-a,a) и всех n = 1, 2, ... выполняется неравенство:

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a$$

Это означает, что на промежутке (-a, a) функция разлагается в ряд Тейлора, а т.к. a была взята произвольно, то функция разлагается в ряд на любом конечном интервале, а значит и на всей числовой оси.

2) Разложим в степенной ряд (в ряд Тэйлора) функцию e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in R,$$

предполагаемый ряд сходится на интервале $(-\infty; +\infty)$ по признаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1} * n!}{(n+1)! * |x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$, для любого $x \in \mathbb{R}$.

3)Докажем теперь, что функция e^x – действительно является суммой полученного ряда. Представим остаточный член ряда в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Где число ξ лежит между 0 и x ($\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

$|R_n(x)| < e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Так как выше мы показали что наш ряд сходится, можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$, а тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

Поэтому переходя к пределу в неравенстве $|R_n(x)| < e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Получаем следующее: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$

и, следовательно, функция $f(x) = e^x$ является суммой ряда. Таким образом при любом x имеет место наше разложение:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in R,$$

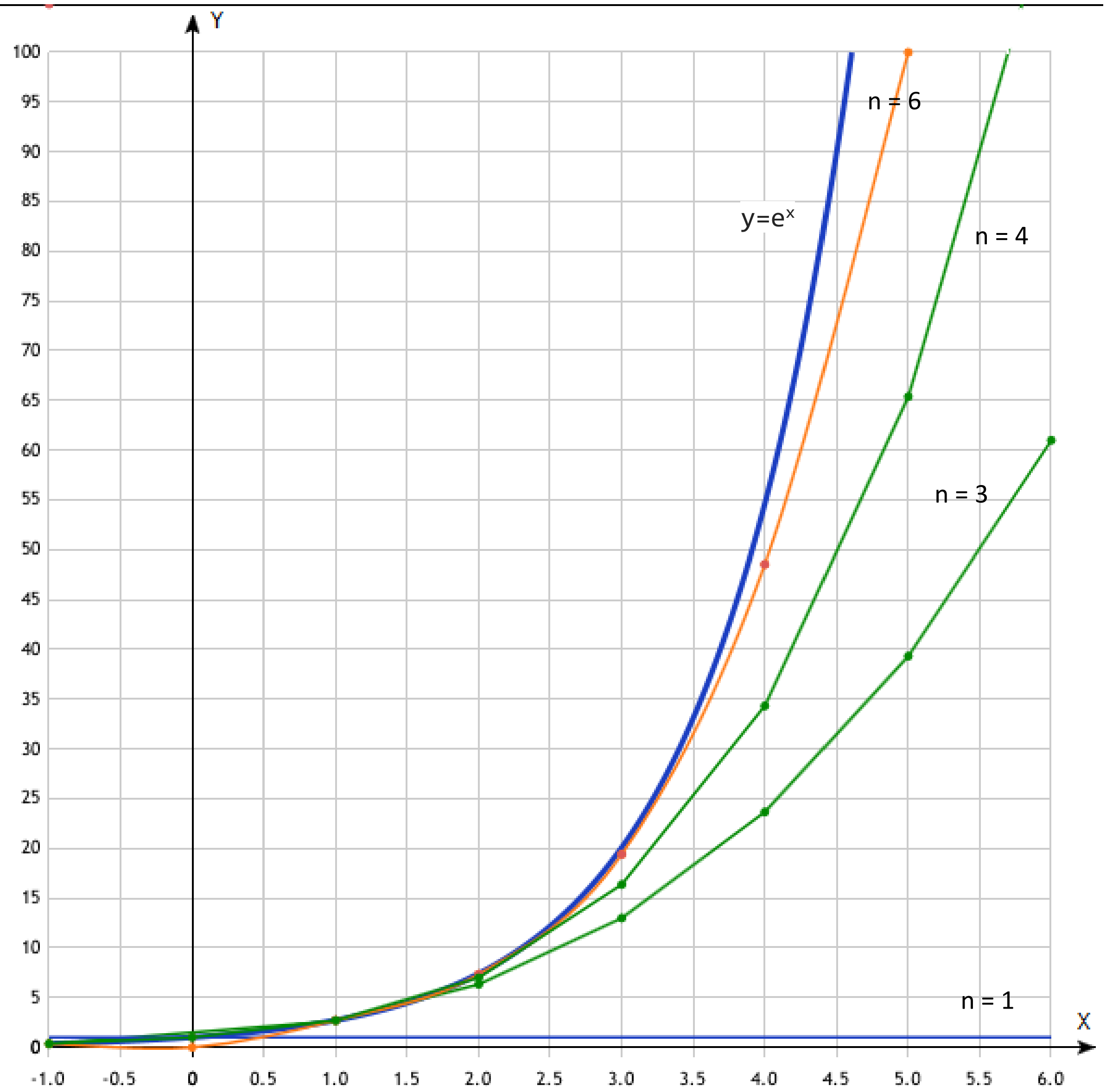
Проверка на ЭВМ.

«Найдём» сумму на ЭВМ для n-слагаемых. Для этого использовалась следующая программа:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

int fact(int n)//n факториал
{
	int rez = 1;
	for (int i = 1; i <= n; i++)
	{
		rez *= i;
	}
	return rez;
}

double elem(int x, int n) //n-ый член суммы
{
	double res;
	res = pow(x,n)/fact(n);
	return res;
}

double expon(int x, int n) //сумма для n членов ряда, начиная с 0
{
	double res = 0;
	for(int i = 0;i<=n;i++)
		res += elem(x, i);
	return res;
}

int main() {
	//функция пишет, для какого n и x она нашла сумму ряда
	//считает сумму ряда для 1,2…7 слагаемых (отсчёт с 0)
	for (int i=0; i<12; i++)
	{
		cout<<"n = "<<i;
		for (int x=-1;x<6;x++)
		{
			cout << "   x = " << x <<"   ";
			cout << expon(x,i)<< endl;
		}
	}
	return 0;
}
```

Результаты работы представлены в таблице:

x	y=e^x	Сумма 1 члена	Сумма 3 членов	Сумма 4 членов	Сумма 6 членов
-1	0.4	1	0.333333	0.375	0.368056
0	1	1	1	1	1
1	2.7	1	2.66667	2.70833	2.71806
2	7.4	1	6.33333	7	7.35556
3	20.1	1	13	16.375	19.4125
4	54.6	1	23.6667	34.3333	48.5556
5	148.4	1	39.3333	65.375	113.118



Вывод

В ходе работы я разложил в степенной ряд функцию $f(x) = e^x$ и написал программу, “вычисляющую” данную сумму на ЭВМ для n членов. В итоге вычисления показали что при росте n возрастает точность суммы ряда и эта сумма стремится к значению функции e^x .

Список литературы

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.
2. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу.2010.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учеб. Пособие: в 3 т. М.: Наука, 1969-1970.