Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики
Направление
«Фундаментальная информатика и информационные технологии»
Кафедра математического моделирования

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СОВМЕСТНОСТЬ И НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ В КАЖДОМ СЛУЧАЕ СОВМЕСТНОСТИ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Линейная алгебра и геометрия

Автор:

Варламов Антон Дмитриевич

1 курс, 16 группа

Научный руководитель:

Старший преподаватель кафедры

математического моделирования,

Шестакова Елена Григорьевна

Тверь 2014

Оглавление

Введение (постановка задачи)

<u>Задача:</u> исследовать на совместность систему AX=B, где A=A_{4x3}, B=B_{4x1}, X=X_{4x1}, в зависимости от значений параметров α и β. В каждом случае совместности найти общее решение системы.

Дана система AX=B, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

где:

A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \alpha \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & \beta & 1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$

Теоретические сведения

Для решения поставленной задачи мне понадобятся следующие теоретические сведения:

- Определение матрицы
- Определение ранга матрицы.
- Определение минора матрицы
- Определение элементарных преобразований матрицы
- Определение совместности системы
- Теорема Кронекера – Капелли.
- Процедура нахождения ранга матрицы.
- Определение «Решение системы алгебраических уравнений»
- Нахождение общего решения

Матрица

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Матрицей системы называют матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных, ***расширенной матрицей*** системы – матрицу из коэффициентов с дополнительным столбцом из свободных членов. Если обозначить их соответственно A и $\widetilde{A}$, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы — наивысший из порядков миноров этой матрицы, отличных от нуля.

Минор k-го порядка матрицы — это определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы.

Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которое представляет эта матрица.

Элементарными преобразованиями строк называют:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;
- умножение любой строки матрицы на константу C, $C \neq 0$
- прибавление к любой строке матрицы другой строки.

Совместность системы — система совместна, если она имеет хотя бы одно решение и несовместна, если у неё нет ни одного решения.

Совместная система вида (1) может иметь одно решение или бесконечное множество решений.

Теорема Кронекера - Капелли — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений:

> *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.*

Процедура нахождения ранга матрицы:

> *При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-ого порядка D, отличный от нуля, то требует вычисления лишь минор k+1-ого порядка, окаймляющий минор D. Если они все равны нулю, то ранг матрицы равен k.*

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных $x_1=a_1$, $x_2=a_2$,…, $x_n=a_n$, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение $A \cdot X = B$ при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество $A \cdot X \equiv B$.

Нахождение общего решения системы:

Пусть система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть мы рассмотрели её на совместность, и определили, что данная система совместна.

С помощью элементарных преобразований приводим основную матрицу системы к ступенчатому виду (метод Гаусса):

$$\begin{cases} \alpha_{1j_1}x_{j_1} + \alpha_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{1j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{1j_n}x_{j_n} &= \beta_1 \\ \alpha_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + \alpha_{2j_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{2j_n}x_{j_n} &= \beta_2 \\ \ldots \\ \alpha_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + \alpha_{rj_n}x_{j_n} &= \beta_r \\ 0 &= \beta_{r+1} \\ \ldots \\ 0 &= \beta_m \end{cases}, \qquad \alpha_{1j_1}, \ldots, \alpha_{rj_r} \neq 0.$$

При этом будем считать, что ненулевой минор максимального порядка основной матрицы находится в верхнем левом углу, то есть в него входят только коэффициенты при переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$.

$\beta_i = 0$ для любых i>r, т.к. по условию система совместна.

Тогда переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ называются главными переменными. Все остальные называются свободными.

Перенесём свободные переменные за знаки равенств и поделим каждое из уравнений системы на свой коэффициент при самом левом x α_{ij_i}, $i = 1, \ldots, r$, где i — номер строки):

$$\begin{cases} x_{j_1} + \widehat{\alpha}_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{1j_r}x_{j_r} &= \widehat{\beta}_1 - \widehat{\alpha}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{1j_n}x_{j_n} \\ x_{j_2} + \ldots + \widehat{\alpha}_{2j_r}x_{j_r} &= \widehat{\beta}_2 - \widehat{\alpha}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{2j_n}x_{j_n} \\ \ldots \\ x_{j_r} &= \widehat{\beta}_r - \widehat{\alpha}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} - \ldots - \widehat{\alpha}_{rj_n}x_{j_n} \end{cases}, \qquad \widehat{\beta}_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij_i}}, \quad \widehat{\alpha}_{ij_k} = \frac{\alpha_{ij_k}}{\alpha_{ij_i}} \quad (2)$$

Где i=1,…,r   k = i,…,n

Если свободным переменным системы (2) придавать все возможные значения и решать новую систему относительно главных неизвестных снизу вверх (то есть от нижнего уравнения к верхнему), то мы получим все решения этой СЛАУ. Так как эта система получена путём элементарных преобразований над исходной системой (1), то по теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях системы (1) и (2) эквивалентны, то есть множества их решений совпадают.

Нахождение рангов матриц А и Ã в зависимости от значений параметров α и β

Матрица Ã имеет размер 4х4, а значит, ее максимальный ранг равен 4. Матрица А имеет размер 4х3, следовательно, ее максимальный ранг равен 3. Исходная система уравнений будет совместна, только если ранги матриц А и Ã будут совпадать. А это, в свою очередь, означает, что ранги А и Ã не могут быть больше 3.

1.Упростим исходную матрицу с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2*III \\ \\ \\ +2*III \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha-5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица Ã имеет единственный определитель четвертого порядка. Для совместности системы Ã необходимо, чтобы он был равен нулю.

2. Выясним, при каких α и β это будет выполняться:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha-5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & \alpha-5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta+2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\beta+2) * \begin{vmatrix} \alpha-5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\beta+2) * (\alpha-5) = (\beta+2) * (5-\alpha)$$

r(Ã) = 4 при (β + 2) * (5 - α) ≠ 0 => α≠5 и β≠-2.

Таким образом, при α≠5 и β≠-2 определитель четвертого порядка матрицы Ã не равен нулю, и исходная система несовместна.

Осталось рассмотреть возможные случаи совместности системы. Их три:

1. α=5 и β ϵ R/{-2}
2. α ϵ R/{5} и β=-2
3. α=5 и β=-2

1) Рассмотрим первый случай: α=5 и β ϵ R/{-2}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right)_{+2*II} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 \end{vmatrix} = -(\beta+2) \neq 0, \text{ т.к. } \beta \neq -2$$

r(A)=r(Ã)=3. Ранг матриц A и Ã равен числу неизвестных, следовательно, у системы есть единственное решение.

2) Рассмотрим второй случай: α ϵ R/{5} и β=-2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) -2*III \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha-5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha-5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{-(-(}\ \alpha-5)) = \alpha - 5 \neq 0, \text{ т.к. } \alpha \neq 5$$

r(A)=r(Ã)=3. Ранг матриц A и Ã равен числу неизвестных, следовательно, у системы есть единственное решение.

Рассмотрим третий случай: α=5 и β=-2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, r(A)=r(Ã)=2. Ранг матриц А и Ã меньше числа неизвестных, следовательно, в этом случае система имеет бесконечно много решений.

Нахождение решений в каждом случае совместности

1. В первом случае совместности, при α=5 и β ϵ R/{-2}:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & \beta & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & -2 & -2 \end{array}\right)_{+2*II} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta+2 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} x1 + 0 * x2 - 3 * x3 = 2 \\ 0 * x1 + x2 + x3 = 1 \\ 0 * x1 + (\beta + 2) * x2 + 0 * x3 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x1 = 2 + 3 * x3 \\ x3 = 1 - x2 \\ (\beta + 2) * x2 = 0 \end{cases} => \begin{cases} x1 = 5 \\ x3 = 1 \\ x2 = 0 \end{cases}$$

В данном случае получено следующее решение: X={5,0,1}

Проверка: -5+0+5 = 0; 10+0-6=4 ; 15+0-5=10; -5+0+1=-4

2. Во втором случае совместности, при α ϵ R/{5} и β=-2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & \alpha-3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) -2 * III \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \alpha-5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} x1 * 0 + 0 * x2 + (\alpha - 5) * x3 = 0 \\ x1 + 0 * x2 - 3 * x3 = 2 \\ 0 * x1 + x2 + x3 = 1 \end{cases} => \begin{cases} (\alpha - 5) * x3 = 0 \\ x1 = 2 + 3 * x3 \\ x2 = 1 - x3 \end{cases} => \begin{cases} x3 = 0 \\ x1 = 2 \\ x2 = 1 \end{cases}$$

В данном случае получено следующее решение: X={2,1,0}

Проверка: -2+2+0=0; 4+0=4; 6+4+0=10; -2-2+0=-4.

3. В третьем случае совместности, при α=5 и β=-2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) * \frac{1}{2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} +II \\ \\ -3*II \\ +II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right) * \frac{1}{4} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

$$\begin{cases} x1 + 0 * x2 - 3 * x3 = 2 \\ 0 * x1 + x2 + x3 = 1 \end{cases} => \begin{cases} x1 = 2 + 3 * x3 \\ x2 = 1 - x3 \end{cases}$$

Общее решение системы: X={2+3*C, 1-C, C}, где C – любое число.

Проверка при С=2:

Частное решение: X={8, -1, 2}

-8-2+10=0; 16+0-12=4; 24-4-10=10; -8+2+2=-4

Заключение

В данной задаче была исследована система линейных алгебраических уравнений на совместность в зависимости от параметров α и β. В ходе решения задачи использовалась теорема Кронекера - Капелли, а так же были рассмотрены понятия ранга и минора матрицы. В ходе решения были рассмотрены следующие случаи:

1. При $\alpha \in R/\{5\}$ и $\beta \in R/\{-2\}$система несовместна.
2. При $\alpha=5$ и $\beta \in R/\{-2\}$ решением является X={5,0,1}
3. При $\alpha \in R/\{5\}$ и $\beta=-2$ решением является X={2,1,0}
4. При $\alpha=5$ и $\beta=-2$ общим решением является X={2+3*C, 1-C, C}, где C – любое число; частным решением является X={8, -1, 2}

Список литературы:

1. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, изд. 3, «Наука», 1966.
2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, изд. 3, «Наука», 1967.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 432 стр.
4. Некрасов К.Г. Методическая разработка для студентов математического факультета «Арифметические пространства. Ранг матрицы.», 2009
5. Рыбаков М.Н. Лекции