Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»  
Математический факультет  
Кафедра математического анализа  
Специальность «Компьютерная безопасность»

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОЛСЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ**

Выполнил:  
Коваленко И.А., группа 24

Проверил:  
д.ф.-м.н., профессор  
Шеретов Ю.В.

Тверь 2017

**Содержание:**Числовые РЯДЫ. функциональные последовательности и ряды. 3

1.Числовые ряды 3

Признак сравнения. 3

Признак Даламбера. 4

Радикальный признак Коши. 4

Интегральный признак Коши. 5

Теорема Лейбница. 5

Признак Дирихле. 6

Признак Абеля. 6

2.Функциональные ряды 6

Признак Вейерштрасса. 7

Теорема Лагранжа 8

3.Степенные ряды 8

Теорема Абеля. 9

4. Практика…………………………………………………………………12

**Теоретический материал курсовой работы:**

1.Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел



*Числовым рядом* называется составленное из этих чисел выражение

.

Числа  называются *членами ряда*,  – *общим членом ряда*.

Конечная сумма



называется -й *частной суммой ряда*. Если существует конечный предел , ряд называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*. Если ряд сходится, число  называется *суммой ряда*, а разность



называется *остатком ряда* (после -го члена).

Необходимый признак сходимости: если ряд сходится, то его общий член *Un*стремится к нулю при .

*Замечание*. Данный признак не является достаточным, т. е. если , то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся; если *Un* не стремится к нулю, то ряд расходится всегда.

Достаточные признаки сходимости числовых рядов (сравнения, Даламбера, Коши) применяются для исследования сходимости только знакоположительных рядов.

## Признак сравнения.

Если даны два знакоположительных ряда

 (1)

, (2)

причем члены ряда (1) не превосходят соответствующих членов ряда (2) , то: а) из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (2); б) из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

*Замечание*. Для выполнения признака сравнения достаточно, чтобы неравенства выполнялись, начиная с некоторого номера *N*, т. е. для всех *n* ≥ *N*.

Для сравнения часто используются ряды:

1. 

2. 

В частности, гармонический ряд  – расходится.

Предельная форма признака сходимости. Если для рядов (1) и (2) существует конечный, отличный от нуля , то рассматриваемые ряды одновременно сходятся или расходятся.

## Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами *U*1+*U*2+...+*Un*+... существует , то при *l*< 1 ряд сходится, при *l* > 1 ряд расходится, при *l* =1 требуются дополнительные исследования.

## Радикальный признак Коши.

Если для ряда с положительными членами *U*1+*U*2+...+*Un*+... существует , то при *l* <1 ряд сходится, при *l* >1 ряд расходится, при *l* =1 требуются дополнительные исследования.

## Интегральный признак Коши.

Если функция *f*(*x*) непрерывная, положительная, невозрастающая для *x* ≥ *a* и, начиная с некоторого *N*, *Un*= *f*(*n*), то ряд  и несобственный интеграл  одновременно сходятся или расходятся:

Ряд

, (3)

где все *an* > 0, называется знакочередующимся.

## Теорема Лейбница.

Если члены знакочередующегося ряда удовлетворяют условиям

*a*1 > *a*2 > *a*3 > ... > *an* > ... (4)

и

, (5)

то такой ряд сходится.

Ряд, удовлетворяющий указанным условиям, называется рядом Лейбница.

Остаток  ряда Лейбница имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине, т. е. .

Это неравенство удобно использовать для оценки погрешности, получаемой при замене суммы *S* ряда Лейбница ее приближенным значением

.

*Замечание*. Теорема Лейбница справедлива, если неравенства (4) выполняются, начиная с некоторого *N*.

Если ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда , т. е. ряд , сходится, то знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

Если же ряд  по признаку Лейбница сходится, но ряд из абсолютных величин его членов расходится, то знакочередующийся ряд сходится условно.

*Замечание*. Аналогично дается определение условной и абсолютной сходимости для знакопеременных рядов.

## Признак Дирихле.

Пусть для ряда  выполнены условия: 1) последовательность  монотонно стремится к нулю, т.е.  или  для всех  и ; 2) последовательность  частичных сумм ряда  ограничена, т.е.   . Тогда ряд  сходится.

## Признак Абеля.

Пусть для ряда  выполнены условия: 1) последовательность  монотонна и ограничена; 2) ряд  сходится.

Тогда ряд  сходится.

## 2.Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций *U*1(*x*), *U*2(*x*), ... , *Un*(*x*), ..., имеющих общую область определения. Функциональным рядом называется составленное из этих функций выражение . При конкретном значении *х* функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

Совокупность значений аргумента *х*, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Область сходимости функционального ряда обычно удается найти с помощью известных признаков сходимости.

Сумма функционального ряда *S*(*x*) определяется аналогично сумме числового ряда, и является функцией от *х*.

Сумму ряда можно представить в виде

*S*(*x*) = *Sn*(*x*) + *rn*(*x*),

где *Sn*(*x*) = *U*1(*x*) + *U*2(*x*)+...+*Un*(*x*) – *n*-я частичная сумма ряда,

*rn*(*x*)=*Un*+1(*x*)+*Un*+2(*x*)+... – остаток ряда.

Функциональный ряд  называется равномерно сходящимся в некоторой области *Х*, если для каждого сколь угодно малого числа ε > 0 найдется такое целое положительное число *N*, что при *n*≥ *N* выполняется неравенство |*rn*(*x*)| < ε для всех *х* из области *Х*.

При этом сумма *S*(*x*) равномерно сходящегося функционального ряда есть непрерывная функция.

Достаточным признаком равномерной сходимости является признак Вейерштрасса.

## Признак Вейерштрасса.

Если члены функционального ряда

*U*1(*x*)+*U*2(*x*)+...+*Un*(*x*)+...

по абсолютной величине не превышают в некоторой области *Х* соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда

*a*1 + *a*2 + ... + *an* + ... ,

то функциональный ряд в области *Х* сходится равномерно.

Функциональные ряды обладают важными свойствами:

1) если функциональный ряд с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке [*a*, *b*], то его можно почленно интегрировать на этом отрезке, т. е.

;

2) если функциональный ряд с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на данном интервале, а ряд, составленный из производных его членов, равномерно сходится на этом интервале, то данный ряд можно почленно дифференцировать в точках этого интервала, т. е.

.

## Теорема Лагранжа

Пусть b=t, a=0

тогда =

тогда

Тогда

## 3.Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида

, (6)

где *an* – числа, называемые коэффициентами степенного ряда.

При *а* = 0 степенной ряд имеет вид

. (7)

Основное свойство степенных рядов формулируется в виде теоремы.

## Теорема Абеля.

1) Если ряд (7) сходится при *х = х*0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении *х*, для которого |*x*| < |*x*0|; 2) если ряд расходится при некотором значении *х*′0, то он расходится при всяком *х*, для которого .

Из теоремы Абеля следует, что существует такое значение *x=R* > 0, что для |*x*| < *R* ряд (11) сходится, а для |*x*| > *R* – расходится.

Интервал (–*R*, *R*) называется интервалом сходимости, а само число *R* – радиусом сходимости степенного ряда (7).

Для ряда (6) интервал сходимости определяется неравенством |*x – a*| < *R*, т. е. интервал сходимости: (–*R + a*; *R + a*).

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда удобно пользоваться достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признаками Даламбера и Коши.

Если функция *f*(*x*) имеет на некотором интервале, содержащем точку *а*, производные всех порядков, то к ней может быть применена формула Тейлора:

,

где  (ξ – между *а* и *х*, т. е. произвольная точка рассматриваемого интервала; *n* – любое натуральное число). Если для некоторого значения *х* *Rn*(*x*)→0 при *n*→∞, то в пределе формула Тейлора превращается для этого значения *х* в ряд Тейлора:

.

Условие  выполняется, если все производные функции ограничены некоторым числом.

При *а* = 0 имеем ряд Маклорена:

.

Таким образом, ряд Тейлора представляет собой разложение функции в ряд по степеням *х – а* или разложение в окрестности точки *а*.

Ряд Маклорена представляет собой разложение функции в ряд по степеням *х* или разложение в окрестности точки *х* = 0.

Приведем готовые разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций, полученные как непосредственным вычислением коэффициентов ряда , так и с использованием свойств почленного дифференцирования и интегрирования рядов в интервале сходимости:

1)  (–∞ < *x* < ∞);

2)  (–∞ < *x* < ∞);

3)  (–∞ < *x* < ∞);

4)  (–∞ < *x* < ∞);

5)  (–∞ < *x* < ∞);

6) 

 (–1 < *x* <1);

7)  (–1 < *x* < 1);

8)  (–1 < *x* < 1);

9)  (–1 < *x* < 1);

10)  ;

11) 

 (–1 <*x* < 1).

*Замечание.* Готовые разложения можно использовать и для функций , , применяя формулы понижения степени:

; .

# 4. Практика.

№ 1.

C помощью признака Даламбера исследовать на сходимость числовой ряд

Признак Даламбера

При – ряд сходится, – расходится, – получается неопределённость.

Поскольку q > 1, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится по признаку Даламбера.

№ 2.

С помощью признака Коши исследовать на сходимость числовой ряд

=> ряд сходится.

Ответ: ряд сходится по признаку Коши.

№ 3.

№ 4.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве функциональную последовательность

Ответ: ряд сходится абсолютно и равномерно.

№ 5.

Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве функциональную последовательность

Ответ:

№ 6.

С помощью мажорантного признака Вейерштрасса исследовать на равномерную и абсолютную сходимость на множестве функциональный ряд

Ответ: исходный ряд сходится абсолютно и равномерно.

№ 7.

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд

Воспользуемся признаком Дирихле для доказательства сходимости ряда:

1)

Последовательность частных сумм ряда которая есть

ограничена, т.е.

2)

Функциональная последовательность монотонна, т.е.

Или

Для всех n из множества N

3)

Пусть

Проверяем условия признака Дирихле:

1.

Домножим левую и правую часть на

Воспользуемся формулой из тригонометрии:

Оценим модуль выражения

Итак,

Первое условие выполнено

2.

, для всех из

Второе условие выполнено.

3.

Третье условие выполнено ряд сходится

Докажем, что ряд абсолютно сходится.

– расходится, т.к. этот ряд есть сумма расходящегося ряда и ещё одного ряда.

→ исходный ряд абсолютно расходится по признаку сравнения.

→ ряд сходится условно.

Ответ: → исходный ряд абсолютно расходится по признаку сравнения.

→ ряд сходится условно.

№ 9.

Найти интервалы сходимости и абсолютной сходимости степенного ряда

Интервал сходимости ряда:

Проверим на сходимость ряд из модулей:

Исходный ряд расходится по признаку сравнение;

Исходный ряд абсолютно расходится в этой точке.

Докажем сходимость ряда по признаку Лейбница:

Проверим разность ряда – го и – го члена ряда:

Ряд сходится

:

Ответ: Ряд расходится и расходится абсолютно;

Ряд сходится при ;

Ряд абсолютно сходится при .

№ 10.

Разложить функцию

в ряд Маклорена. Найти интервал сходимости ряда.

Стандартные разложения:

Интервал сходимости:

;

, т.е.

Ответ: ,

интервал сходимости .

.

.

**Задания для курсовой работы  
 «Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды»  
 студента группы М-24 математического факультета  
 Коваленко И.А.**

1. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость числовой ряд
2. С помощью признака Коши исследовать на сходимость числовой ряд
3. С помощью признака сравнения исследовать на сходимость числовой ряд
4. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве функциональную последовательность
5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве функциональную последовательность
6. С помощью мажорантного признака Вейерштрасса исследовать на равномерную и абсолютную сходимость на множестве функциональный ряд
7. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд
8. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

на множестве

1. Найти интервалы сходимости и абсолютной сходимости степенного ряда
2. Разложить функцию

в ряд Маклорена. Найти интервал сходимости ряда.