Министерство образования и науки Российской Федерации

«Тверской Государственный Университет»

Математический факультет

**РЕФЕРАТ**

по дисциплине: «Математический анализ»

на тему: «Сравнение бесконечно больших последовательностей и функций»

Выполнил:

студент 1 курса,

группы М-14 ,

Кокорин Даниил Александрович

Руководитель:

доц. А.А. Голубев

г. Тверь, 2017 г.

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc499241220)

[Доказать следующие равенства: 4](#_Toc499241221)

[Задание 1. 4](#_Toc499241222)

[Задание 2. 4](#_Toc499241223)

[Задание 3. 4](#_Toc499241224)

[Задание 4. 5](#_Toc499241225)

[Задание 5. 5](#_Toc499241226)

[Задание 6. 5](#_Toc499241227)

[Задание 7. 6](#_Toc499241228)

[Задание 8. 6](#_Toc499241229)

[Задание 9. 7](#_Toc499241230)

[Задание 10. 7](#_Toc499241231)

[Заключение 8](#_Toc499241232)

[Список литературы 9](#_Toc499241233)

## Введение

В данной работе описаны методы для решения задач рода «доказать справедливость равенства», использующие следующие определения, теоремы и свойства:

* Определение предела числовой последовательности
* Переход к пределу в неравенствах
* Теорема о промежуточной последовательности
* Свойство корня n-ной степени
* Неравенство Бернулли
* Метод математической индукции
* Определение предела на бесконечности по Коши
* Метод замены переменной

Целью данной работы является изучение данных методов для решения приведенных далее задач.

## Доказать следующие равенства:

### Задание 1.

Используем теорему о пределе промежуточной последовательности:

Пусть ε>0 – произвольное. Так как , то .

Аналогично для *{zn}*: так как , то .

В этом задании цель такова, чтобы найти такие *{xn}* и *{zn}*, для которых выполняется .

, где *{xn}*→ 0 и при n→∞. Тогда получили и , следовательно, .

### Задание 2.

1. a>1: используем теорему о пределе промежуточной последовательности (см. №1): найдем такие *{xn}* и *{zn}*, что . При этом, чтобы получить *{yn}*≤*{zn}*, фиксируем m натуральное такое, что m>k. Тогда

, где .

Докажем, что :

Применяя теорему о предельном переходе в произведении, получаем, что при m>k при n → ∞. Таким образом:, где при .

### Задание 3.

.

Пусть ε>0 – произвольный. Тогда существует натуральный m такой, что при n>m выполняется неравенство . Используя параллельно теорему о промежуточной последовательности, получаем:

. Неравенство справедливо при любом ε>0 и m+1> |a|, если n достаточно велико. Значит, при и следует, что .

### Задание 4.

, |q| <1.

1. Аналогично №2, преобразуем выражение с заменой переменной:

, где . В свою очередь , тогда .

1. При q>1 предел будет равен бесконечности, т.к. при , и тогда .

### **Задание 5.**

Доказывая данное равенство, мы одновременно доказываем свойство: при любой C>0.

1. При a = 1 очевидно .
2. Пусть a>1, тогда . Положим , где *bn* – полож. величина, зависящая от n. Отсюда следует

То, что мы получили, — это неравенство Бернулли. Оно имеет место при *bn* ≥ -1 для всех натуральных n. Преобразуя, получим , откуда получаем при (ε>0). В итоге .

1. Пусть 0 < a < 1, тогда и из вышеописанного свойства корня n-ной степени из константы . Однако

.

### **Задание 6.**

1. a>1: из №2: т.к. , b>1, то при достаточно большом n.

Пусть >0 – произвольное. Положим , где a >1. Тогда неравенство приобретет вид => .

Логарифмируя последнее неравенство, получим , откуда при достаточно большом *n*. Отсюда и следует, что .

### **Задание 7.**

Аналогично №5: пусть >0 – произвольное, тогда существует N, что при n>N выполняется . Положим при любой натуральной n. Тогда

.

Отсюда из определения предела следует, что при >0 и при всех . В итоге .

### **Задание 8**.

Пусть >0 – произ. Из теоремы о промежуточной последовательности или .

Для доказательства последнего неравенства применим метод математической индукции. При n=1 оно, очевидно, справедливо, поскольку . Далее, если оно справедливо при n, то при n+1 имеем:

Последнее неравенство справедливо, поскольку

Из этого утверждения и в рез-ты индукции следует, что, действительно, . И тогда справедливо для любого ε>0 при всех . Получаем, что .

### **Задание 9.**

Из определения предела на бесконечности по Коши: функция имеет предел на *плюс бесконечности*, если для произвольного ε>0 найдется зависящее от него положительное δ такое, что для любого элемента, находящегося правее от δ выполняется неравенство |*f(x) – a*| < ε.

Из №2 нам известно, что при a>1. При этом одновременно справедливо .

Пусть ε>0 – произ., тогда существует натуральное N такое, что при n>N выполняется .

Пусть x>N+1 = δ; положим n = [x]. Тогда при n>N и n ≤ x < n+1

. Следовательно: и .

### **Задание 10.**

Положим . Тогда .

В силу равенства (из №6) мы также имеем .

Пусть ε1>*0* – произ., тогда существует натуральное N, что при n>N выполняется .

Из определения предела на бесконечности по Коши (аналогично №9): для t>δ = N+1 положим n = [t]. Тогда n>N и n ≤ t < n+1, так что

, где, очевидно, , а тем самым .

## Заключение

Совмещение нескольких теорем для решения одной задачи помогает рассмотреть ее сразу с разных сторон и определить более точное решение.

## Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1. – 2-е изд., перераб. И доп. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. Шк., 1988. – 712 с.: ил.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I. – 3-е изд., перераб. и доп. / С.М. Никольский. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 464 с.
3. Злыгостев. А.С. Библиотека по математике [Электронный ресурс] / А.С. Злыгостев, Н.А. Колпачёва. – электрон. текст. дан. – [2001- ]. - Режим доступа: <http://mathemlib.ru>, свободный.
4. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – электрон. Текст. дан. – 2009. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org>, свободный.