Министерство образования и науки Российской Федерации

«Тверской Государственный Университет»

Математический факультет

**РЕФЕРАТ**

по дисциплине: «Математический анализ»

на тему: «Сравнение бесконечно больших последовательностей и функций»

Выполнил:

студент 1 курса,

группы М-14 ,

Кокорин Даниил Александрович

Руководитель:

доц. А.А. Голубев

г. Тверь, 2017 г.

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc499241220)

[Доказать следующие равенства: 4](#_Toc499241221)

[Задание 1. 4](#_Toc499241222)

[Задание 2. 4](#_Toc499241223)

[Задание 3. 4](#_Toc499241224)

[Задание 4. 5](#_Toc499241225)

[Задание 5. 5](#_Toc499241226)

[Задание 6. 5](#_Toc499241227)

[Задание 7. 6](#_Toc499241228)

[Задание 8. 6](#_Toc499241229)

[Задание 9. 7](#_Toc499241230)

[Задание 10. 7](#_Toc499241231)

[Заключение 8](#_Toc499241232)

[Список литературы 9](#_Toc499241233)

## Введение

В данной работе описаны методы для решения задач рода «доказать справедливость равенства», использующие следующие определения, теоремы и свойства:

* Определение предела числовой последовательности
* Переход к пределу в неравенствах
* Теорема о промежуточной последовательности
* Свойство корня n-ной степени
* Неравенство Бернулли
* Метод математической индукции
* Определение предела на бесконечности по Коши
* Метод замены переменной

Целью данной работы является изучение данных методов для решения приведенных далее задач.

## Доказать следующие равенства:

### Задание 1.

$$\lim\_{n\to \infty }\frac{2^{n}}{n!}=0$$

Используем теорему о пределе промежуточной последовательности:

$$Пусть ∀n\in N \left(x\_{n}\leq y\_{n}\leq z\_{n}\right) и \lim\_{n\to \infty }x\_{n}=\lim\_{n\to \infty }z\_{n}=a. Тогда ∃\lim\_{n\to \infty }y\_{n}=a$$

Пусть ε>0 – произвольное. Так как $\lim\_{n\to \infty }x\_{n}=a$, то $∃N\_{1}∀n(n>N\_{1}=> \left|x\_{n}-a\right|<ε)$.

Аналогично для *{zn}*: так как $\lim\_{n\to \infty }z\_{n}=a$, то $∃N\_{2}∀n(n>N\_{2}=> \left|z\_{n}-a\right|<ε)$.

В этом задании цель такова, чтобы найти такие *{xn}* и *{zn}*, для которых выполняется $x\_{n}\leq y\_{n}\leq z\_{n}$.

$0\leq \frac{2^{n}}{n!}=\frac{2}{1}×\frac{2}{2}×\frac{2}{3}×…×\frac{2}{n}\leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ , где *{xn}*→ 0 и $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\rightarrow 0$ при n→∞. Тогда получили $\lim\_{n\to \infty }x\_{n}=0$ и $\lim\_{n\to \infty }z\_{n}=0$, следовательно, $\lim\_{n\to \infty }y\_{n}=\lim\_{n\to \infty }\left(\frac{2^{n}}{n!}\right)=0$.

### Задание 2.

$$\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{k}}{a^{n}}=0, a>1$$

1. a>1: используем теорему о пределе промежуточной последовательности (см. №1): найдем такие *{xn}* и *{zn}*, что $\lim\_{n\to \infty }x\_{n}\leq \lim\_{n\to \infty }y\_{n}\leq \lim\_{n\to \infty }z\_{n}$. При этом, чтобы получить *{yn}*≤*{zn}*, фиксируем m натуральное такое, что m>k. Тогда

$0\leq \frac{n^{k}}{a^{n}}\leq \frac{n^{m}}{a^{n}}=\left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^{n}}}\right)^{m}=\left(\frac{n}{b^{n}}\right)^{m}$, где $b=\sqrt[m]{a}>1$.

Докажем, что $\lim\_{n\to \infty }\frac{n}{b^{n}}=0$:

$$0<\frac{n}{b^{n}}=\frac{n}{\left(1+\left(b-1\right)\right)^{n}}=\frac{n}{1+n\left(b-1\right)+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\left(b-1\right)^{2}+…+\left(b-1\right)^{n}}\leq \frac{2n}{n\left(n-1\right)\left(b-1\right)^{2}}\rightarrow 0$$

Применяя теорему о предельном переходе в произведении, получаем, что при m>k $\left\{z\_{n}\right\}=\left(\frac{n}{b^{n}}\right)^{m}\rightarrow 0$ при n → ∞. Таким образом:$0<\frac{n^{k}}{a^{n}}<\left(\frac{n}{b^{n}}\right)^{m}$, где $\frac{n^{k}}{a^{n}}\rightarrow 0$ при $n\rightarrow \infty $.

### Задание 3.

$\lim\_{n\to \infty }\frac{a^{n}}{n!}=0$.

Пусть ε>0 – произвольный. Тогда существует натуральный m такой, что при n>m выполняется неравенство $\left|y\_{n}-a\right|<ε$. Используя параллельно теорему о промежуточной последовательности, получаем:

$0<\left|\frac{a^{n}}{n!}\right|=\frac{\left|a\right|}{1}×\frac{\left|a\right|}{2}×…×\frac{\left|a\right|}{m}×\frac{\left|a\right|}{m+1}×…×\frac{\left|a\right|}{n}\leq \frac{|a|^{m}}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}<ε$. Неравенство справедливо при любом ε>0 и m+1> |a|, если n достаточно велико. Значит, при $\left|y\_{n}-a\right|<ε ⇔\left|\frac{a^{n}}{n!}\right|<ε$ и $\lim\_{n\to \infty }x\_{n}=\lim\_{n\to \infty }z\_{n}=0$ следует, что $\lim\_{n\to \infty }y\_{n}=\lim\_{n\to \infty }\frac{a^{n}}{n!}=0$.

### Задание 4.

$\lim\_{n\to \infty }nq^{n}=0$, |q| <1.

1. Аналогично №2, преобразуем выражение с заменой переменной:

$0<\left|nq^{n}\right|=\frac{n}{\left|\frac{1}{q}\right|^{n}}=\frac{n}{b^{n}}$ , где $b=\left|\frac{1}{q}\right|^{}>1$. В свою очередь $\frac{n}{b^{n}}\rightarrow 0$, тогда $\lim\_{n\to \infty }\left|nq^{n}\right|=\lim\_{n\to \infty }nq^{n}=0$.

1. При q>1 предел будет равен бесконечности, т.к. $b^{n}=\left|\frac{1}{q}\right|^{n}\rightarrow 0$ при $n\rightarrow \infty $, и тогда $\lim\_{n\to \infty }\frac{n}{b^{n}}=\lim\_{n\to \infty }\frac{n}{0}=\infty $.

### **Задание 5.**

$$\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{a}=1$$

Доказывая данное равенство, мы одновременно доказываем свойство: $\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{C}=1$ при любой C>0.

1. При a = 1 очевидно $\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{1}=1$.
2. Пусть a>1, тогда $\sqrt[n]{a}>1$. Положим $\sqrt[n]{a}=1+b\_{n}$, где *bn* – полож. величина, зависящая от n. Отсюда следует

$$a=(1+b\_{n})^{n}>1+nb\_{n}$$

То, что мы получили, — это неравенство Бернулли. Оно имеет место при *bn* ≥ -1 для всех натуральных n. Преобразуя, получим $a=\left(1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right)^{n}>1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)>n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, откуда получаем $0<\sqrt[n]{a}-1<\frac{a}{n}<ε$ при $n=\frac{a}{ε}$ (ε>0). В итоге $\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{a}=1$.

1. Пусть 0 < a < 1, тогда $\frac{1}{a}>1$ и из вышеописанного свойства корня n-ной степени из константы $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\rightarrow 1$. Однако

$\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{a}=\lim\_{n\to \infty }\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1$.

### **Задание 6.**

 $\lim\_{n\to \infty }\frac{log\_{a}n}{n}=0, a>1$

1. a>1: из №2: т.к. $\lim\_{n\to \infty }\frac{n}{b^{n}}=0$, b>1, то $\frac{1}{b^{n}}<\frac{n}{b^{n}}<1$ при достаточно большом n.

Пусть $ε$>0 – произвольное. Положим $b=a^{ε}$, где a >1. Тогда неравенство приобретет вид $\frac{1}{a^{εn}}<\frac{n}{a^{εn}}<1$ => $1<n<a^{εn}$.

Логарифмируя последнее неравенство, получим $0<log\_{a}n<εn$, откуда $0<\frac{log\_{a}n}{n}<ε$ при достаточно большом *n*. Отсюда и следует, что $\lim\_{n\to \infty }\frac{log\_{a}n}{n}=0$.

### **Задание 7.**

 $\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{n}=1$

Аналогично №5: пусть $ε$>0 – произвольное, тогда существует N, что при n>N выполняется $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<ε$. Положим $\sqrt[n]{n}=1+b\_{n}$ при любой натуральной n. Тогда

 $n=\left(1+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\right)^{n}=1+n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)+\frac{n\left(n-1\right)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^{2}+…+\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{n}>\frac{n(n-1)}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{2}$.

Отсюда из определения предела следует, что $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<ε$ при $ε$>0 и при всех $n>1+2ε^{-2}$. В итоге $\lim\_{n\to \infty }\sqrt[n]{n}=1$.

### **Задание 8**.

 $\lim\_{n\to \infty }\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

Пусть $ε$>0 – произ. Из теоремы о промежуточной последовательности $0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^{n}}}=\frac{3}{n}$ или $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}$.

Для доказательства последнего неравенства применим метод математической индукции. При n=1 оно, очевидно, справедливо, поскольку $1>\frac{1}{3}$. Далее, если оно справедливо при n, то при n+1 имеем:

$$\left(n+1\right)!=n!\left(n+1\right)>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}\left(n+1\right)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}×\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}×\frac{1}{n^{2}}+…+\frac{n\left(n-1\right)…\left(n-n+1\right)}{n!}×\frac{1}{n^{n}}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+…+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)…\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1+1+\frac{1}{2!}+…+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+…+\frac{1}{2^{n-1}}<1+1+\frac{1}{2}+…+\frac{1}{2^{n-1}}+…=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

Из этого утверждения и в рез-ты индукции следует, что, действительно, $n!>\left(\frac{n}{3}\right)^{n}$. И тогда $0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^{n}}}=\frac{3}{n}<ε$ справедливо для любого ε>0 при всех $n>\frac{3}{ε}$. Получаем, что $\lim\_{n\to \infty }\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

### **Задание 9.**

 $\lim\_{x\to +\infty }\frac{x^{k}}{a^{x}}=0, a>1, k>0$

Из определения предела на бесконечности по Коши: функция имеет предел на *плюс бесконечности*, если для произвольного ε>0 найдется зависящее от него положительное δ такое, что для любого элемента, находящегося правее от δ выполняется неравенство |*f(x) – a*| < ε.

Из №2 нам известно, что $\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{k}}{a^{n}}=0$ при a>1. При этом одновременно справедливо $\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(n+1\right)^{k}}{a^{n}}=0$.

Пусть ε>0 – произ., тогда существует натуральное N такое, что при n>N выполняется $\frac{\left(n+1\right)^{k}}{a^{n}}<ε$.

Пусть x>N+1 = δ; положим n = [x]. Тогда при n>N и n ≤ x < n+1

$0<\frac{x^{k}}{a^{x}}<\frac{\left(n+1\right)^{k}}{a^{n}}<ε$. Следовательно: $\lim\_{x\to +\infty }\frac{n^{k}}{a^{n}}<\lim\_{n\to \infty }\frac{\left(n+1\right)^{k}}{a^{n}}$ и $\lim\_{n\to \infty }\frac{n^{k}}{a^{n}}=0$.

### **Задание 10.**

 $\lim\_{x\to +\infty }\frac{log\_{a}x}{x^{ε}}=0, a>1, ε>0$

Положим $t=x^{ε}$. Тогда $\lim\_{x\to +\infty }\frac{log\_{a}x}{x^{ε}}=\frac{1}{ε}\lim\_{t\to +\infty }\frac{log\_{a}t}{t}$.

В силу равенства $\lim\_{n\to \infty }\frac{log\_{a}n}{n}=0$ (из №6) мы также имеем $\lim\_{n\to \infty }\frac{log\_{a}(n+1)}{n}=0$.

Пусть ε1>*0* – произ., тогда существует натуральное N, что при n>N выполняется $0<\frac{log\_{a}(n+1)}{n}<ε\_{1}$.

Из определения предела на бесконечности по Коши (аналогично №9): для t>δ = N+1 положим n = [t]. Тогда n>N и n ≤ t < n+1, так что

$0<\frac{log\_{a}t}{t}<\frac{log\_{a}(n+1)}{n}<ε\_{1}$, где, очевидно, $\lim\_{t\to +\infty }\frac{log\_{a}t}{t}=0$, а тем самым $\lim\_{x\to +\infty }\frac{log\_{a}x}{x^{ε}}=0$.

## Заключение

 Совмещение нескольких теорем для решения одной задачи помогает рассмотреть ее сразу с разных сторон и определить более точное решение.

## Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1. – 2-е изд., перераб. И доп. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. Шк., 1988. – 712 с.: ил.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I. – 3-е изд., перераб. и доп. / С.М. Никольский. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 464 с.
3. Злыгостев. А.С. Библиотека по математике [Электронный ресурс] / А.С. Злыгостев, Н.А. Колпачёва. – электрон. текст. дан. – [2001- ]. - Режим доступа: <http://mathemlib.ru>, свободный.
4. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – электрон. Текст. дан. – 2009. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org>, свободный.