Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Тверской государственный университет»

Математический факультет

Специальность «Компьютерная безопасность»

Кафедра математического анализа

**Гармонические функции. Определение, уравнение Лапласа, связь с голоморфными функциями**

курсовая работа по дисциплине

**«Теория функций комплексного переменного»**

Автор:

Кокорин Д.А., третий курс, группа М-34

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доц.

Граф С.Ю.

Тверь 2020

СОДЕРЖАНИЕ

[ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ 3](#_Toc39266962)

[МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 4](#_Toc39266963)

[Задача 1 5](#_Toc39266964)

[Задача 2 6](#_Toc39266965)

[Задача 3 8](#_Toc39266966)

[Задача 4 11](#_Toc39266967)

[Задачи 5, 6 13](#_Toc39266968)

[СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ 15](#_Toc39266969)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

Пусть функция моногенна (комплексно дифференцируема) в области D, т.е. для неё выполняются следующие условия:

1. функции и дифференцируемы в каждой точке области D;
2. в каждой точке D выполняются условия Коши-Римана:

Также пусть и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Тогда, дифференцируя первое из равенств (1) по , а второе – по , получаем

Складывая эти равенства и учитывая, что производные и в силу их непрерывности равны, находим

Аналогично получаем

Действительная функция , имеющая в области D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая уравнению (2), называется *гармонической* в области D, а уравнение (2) – *уравнением Лапласа*.

Гармонические функции и , связанные между собой условиями Коши-Римана, называются *сопряжёнными*.

Поскольку функция дифференцируема в области D, то по определению она является голоморфной. В связи с этим можно судить, что её действительная и мнимая части являются гармоническими функциями в этой области.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Для решения задач в курсовой работе будем пользоваться следующими приёмами, соотношениями:

* правила дифференцирования действительных функций;
* решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка;
* – полный дифференциал;
* определение логарифма: если – ненулевое, , то

Задача 1

Доказать, что , , (большая черта означает, что переход к сопряжённому значению совершается после дифференцирования).

**Решение:**

1. Раскроем левую часть равенства:

Пользуясь свойством о том, что сопряжённая сумма чисел есть сумма сопряжённых:

Заметим, что и и переставим слагаемые:

Раскроем теперь правую часть равенства:

Заметим, что у частные производные будут иметь противоположный знак, и вынесем знак минус из мнимой части слагаемых:

Таким образом, равенство имеет место.

1. Левая часть:

Правая часть:

1. Решение аналогично пункту 2).

Левая часть:

Правая часть:

Задача 2

1. Будет ли гармонической функция , если – гармоническая функция?
2. Пусть – гармоническая функция. Для каких функций функция будет тоже гармонической?

**Решение:**

1. Предположим, что является гармонической функцией. Тогда она является решением уравнения Лапласа. Продифференцируем функцию по дважды:

Точно так же, продифференцировав по , получим

Сложим полученные равенства:

Правая часть неотрицательная. Это возможно тогда и только тогда, когда – постоянная функция. Во всех остальных случаях не будет являться гармонической.

1. Чтобы была гармонической функцией, она должна быть решением уравнения Лапласа. Найдём производные по и :

Сложим полученные равенства:

Поскольку по условию – гармоническая функция, то последняя сумма будет равна нулю, и тогда

Исходя из пункта 1) текущей задачи, правая часть этого равенства не равна нулю тогда и только тогда, когда Следовательно, будет гармонической при . Проинтегрируем последнее равенство дважды:

где и – действительные числа.

Задача 3

Будут ли функции , , гармоническими, если – аналитическая функция?

**Решение:**

1. Так как – аналитическая функция, то и – сопряжённые гармонические функции. Из пункта 1) задачи 2 мы знаем, что и – функции негармонические. Найдём .

Заметим, что

Аналогичное равенство получим при дифференцировании по :

Сложим результаты:

Посчитаем все производные в скобках, пользуясь полученными суммами в пункте 1) задачи 2 и фактом сопряжённости гармонических функций и (1):

Подставим найденные производные:

если , как и, следовательно, . Тогда, как мы выяснили ранее, не является гармонической функцией.

2), 3) Рассмотрим функцию из определения логарифма:

, ,

Если мы докажем, что – аналитическая, то мы докажем, что и – гармонические функции. Проверим выполнимость условий Коши-Римана для логарифма, продифференцировав их по и .

;

Т.к. – аналитическая функция, то для неё выполняются условия Коши-Римана: . Сравним полученные производные.

Путём замены производных и в соответствии с условиями Коши-Римана мы получим, что – функция аналитическая и, как следствие, и – гармонические.

Задача 4

Преобразовать оператор Лапласа к полярной системе координат и найти решение уравнения Лапласа , зависящее только от .

**Решение:** из тригонометрического представления комплексного числа , . Отсюда и . Найдём вторые производные и по и

Найдём вторые производные по и и сложим:

Пусть теперь – решение уравнения Лапласа в полученном виде. Поскольку функция не зависит от , последнее слагаемое в уравнении будет равно нулю. Решим дифференциальное уравнение:

Задачи 5, 6

Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (отличные от постоянной), и в случае существования найти их.

1. ;
2. .

**Решение:** для каждой функции проверим непрерывность первого и второго частных производных и, в случае успеха, найдём решение уравнение Лапласа. Если эти условия выполняются, функции являются гармоническими.

Полученные частные производные непрерывны. Решим следующее дифференциальное уравнение:

, поэтому

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. *Лекции по теории функции комплексного переменного*. М., 1989.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М., 1987.
3. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. М., 1967.