Министерство образования и науки Российской Федерации
«Тверской Государственный Университет»

Математический факультет

РЕФЕРАТ

по дисциплине «Математический анализ»
на тему «Площадь плоской фигуры и длина дуги кривой».

Выполнил:
студент _1_ курса,
группы _М-14_,
Кокорин Даниил Александрович

Руководитель:
доц. А.А. Голубев

г. Тверь, 2018 г.

Содержание

Введение

В данной работе описаны методы для решения задач рода «найти площадь области, ограниченной графиками функций» и «найти длину дуги кривой, заданной уравнением», использующие следующие свойства:

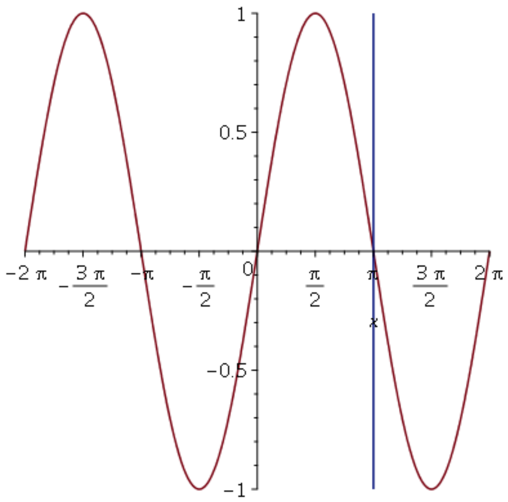
- Геометрический смысл определенного интеграла
- Площадь криволинейной трапеции
- Площадь криволинейного сектора
- Длина непрерывно дифференцируемой кривой

Целью данной работы является освоение данных свойств для решения приведенных ниже задач.

Найти площадь области, ограниченной графиками функций:

1. Синусоиды $y=\sin(x)$, прямой $x=\pi$ и осью абсцисс.

Сделаем эскиз.



Поскольку область ограничена осью Ох и заданной прямой, то искомая находится на отрезке $[0;\pi]$, эдакая парабола, ветви которой направлены вниз.

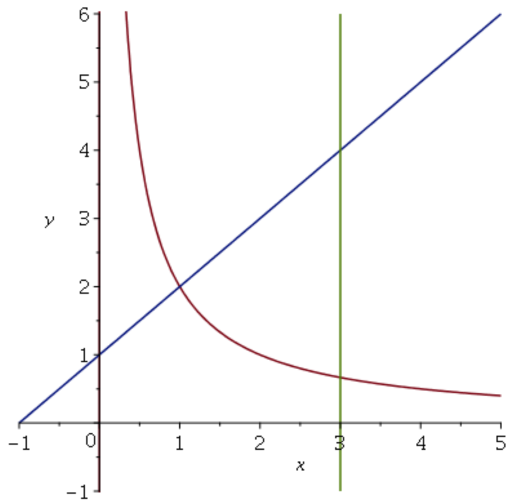
Из геометрического смысла определённого интеграла: если функция f(x) непрерывна и неотрицательна на отрезке $[0;\pi]$, то интеграл $\int_0^{\pi}\sin(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=0, x=0, x=п и y=sin(x). По формуле Ньютона-Лейбница:

$$P=\int_0^{\pi}\sin(x)dx=-\cos(\pi)\Big|_0^{\pi}=-(\cos(\pi)-\cos(0))=-(-1-1)=2$$

Ответ: $P=2$.

2. Гиперболой $y=\frac{2}{x}$, прямыми $y=x+1$ и $x=3$ и осью абсцисс.

Изобразим график.



Искомая область есть часть треугольника (ограниченного прямыми и осью Ox), отсечённая линией гиперболы. В противном случае не была бы удовлетворена ограниченность области осью абсцисс.

Заметим, что в отрезках $[-1;1]$ и $[1;3]$ область ограничена графиками разных функций. В данном случае нужно отдельно посчитать интегралы $\int_{-1}^{1}(x+1)dx$ и $\int_{1}^{3}\frac{2}{x}dx$, а потом сложить полученные площади.

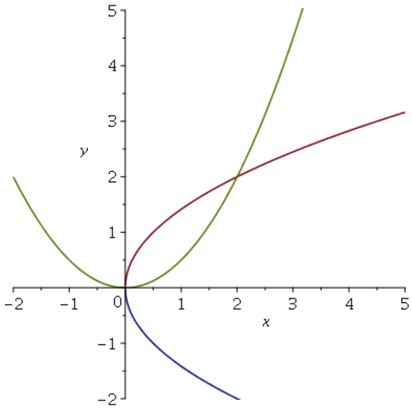
$$P_1=\int_{-1}^{1}(x+1)dx=\left(\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}-(-1)\right)=1+1=2$$

$$P_2=\int_{1}^{3}\frac{2}{x}dx=2\int_{1}^{3}\frac{1}{x}dx=2(\ln(3)-\ln(1))=2\ln(3)$$

$$P=P_1+P_2=2+2\ln(3)=2(1+\ln(3))$$

Ответ: $P=2(1+\ln(3))$.

3. Парабол $y^2=2px$ и $x^2=2py$.



Это один из случаев, когда область ограничена двумя линиями. В общем случае, если на отрезке $[a;b]$ заданы две непрерывные функции y=f(x) и y=g(x), причём $\forall x\in[a;b]: g(x)\le f(x)$, то фигура, ограниченная прямыми x=a и x=b и графиками ф-ций f и g, имеет площадь, равную

$$\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))dx \ .$$

В данном случае за f(x) выступает $y^2=2px$. Действительно, все её точки в области находятся выше второй параболы. Обе имеют две общие точки, одна из которых в начале координат. Найдём вторую, решив уравнение. Но перед этим нужно выразить «y» в каждом уравнении функций.

1) $y=\pm\sqrt{2px}$; 2) $y=\frac{x^2}{2p}$.

Поскольку искомая область находится над осью Ox, то из первой параболы нас интересует только та часть, которая и ограничивает эту область. Поэтому перед корнем оставляем знак плюс.

Теперь найдём точку пересечения графиков, или верхний предел интегрирования.

$\sqrt{2px}=\frac{x^2}{2p}$; $\quad x^4-8p^3x=0$; $\quad x=\{0;2p\}$.

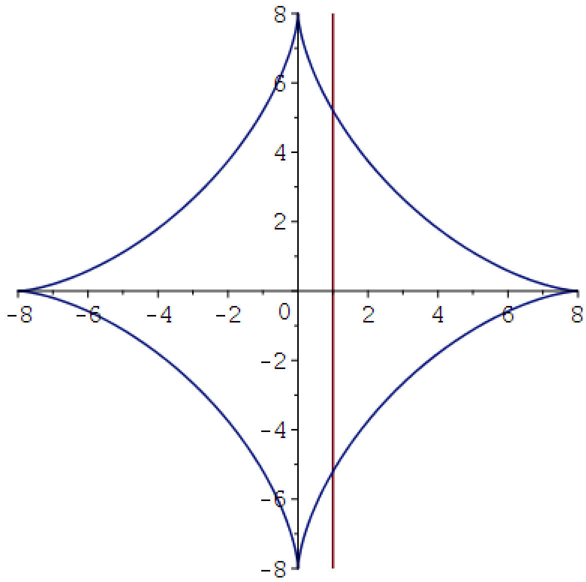
Тогда площадь области:

$$P=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\sqrt{2p}\int_0^{2p}x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2p}\int_0^{2p}x^2dx=\sqrt{2p}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2p}-\frac{1}{2p}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2p}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2p}\sqrt{8p^3}}{3}-\frac{8p^3}{6p}=\frac{4p^2}{3}$$

Ответ: $P=\frac{4p^2}{3}$.

4. Линии, заданной параметрически $\begin{cases}x=8\cos^3 t\\ y=8\sin^3 t\end{cases}$ и прямой $x=1, x\geq 1$.



Кривая является астроидой, и искомая область расположена справа от прямой $x=3$.

Когда уравнение линии задано параметрически, где $x=x(t)$ - непрерывно дифференцируемая на $[\alpha;\beta]$ функция $(t\in[\alpha;\beta])$, а $y(t)$ - непрерывная функция, причем $x=x(t)$ строго монотонная на отрезке, то $f(x)=y(t(x)), x\in[a;b]$, и площадь фигуры:

$$P=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta y(t)dx(t)=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$.

Найдем значения параметра, которые определяют точки пересечения прямой и астроиды. Для этого подставим $x=1$ в первое уравнение:

$8\cos^3 t=1$;

$$\cos^3 t=\frac{1}{8}\Rightarrow\cos t=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\pm\frac{\pi}{3}\ .$$

Поскольку фигура симметрична оси абсцисс, проще будет вычислить ее верхнюю половину, а результат удвоить:

$$P=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}8\sin^3 t\,(8\cos^3 t)'\,dt=-2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}8\sin^3 t\,(-12\sin t\,(1+\cos 2t))\,dt=192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin^4 t\,(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3-4\cos 2t+\cos 4t}{8}+\sin^4 t\cos 2t\right)dt=24\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(3-4\cos 2t+\cos 4t)\,dt+$$

$$+192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3-4\cos 2t+\cos 4t}{8}\cos 2t\,dt=24\pi-24\sqrt{3}-3\sqrt{3}+24\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos 2t\,(3-4\cos 2t+\cos 4t)\,dt=$$

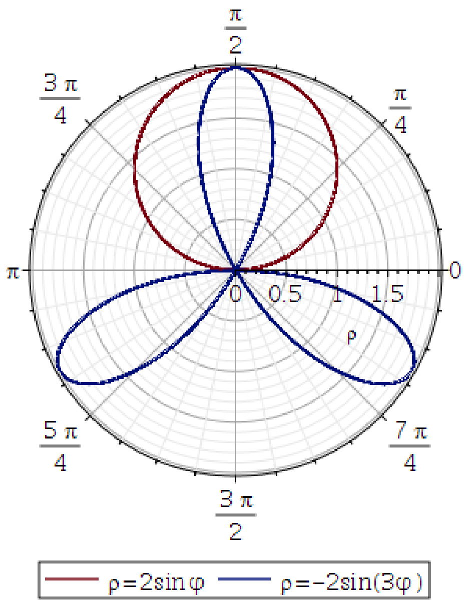
$$=24\pi-27\sqrt{3}+18\sqrt{3}-96\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 2t\,dt+12\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2t+\cos 6t)\,dt=24\pi-9\sqrt{3}+3\sqrt{3}-$$

$$-96\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt=24\pi-6\sqrt{3}-16\pi+6\sqrt{3}=8\pi.$$

Ответ: $P=8\pi.$

5. Линий, заданных в полярной системе координат

$$\rho_1=2\sin\phi,\rho_2=-2\sin 3\phi$$



В общем случае если задана непрерывная неотрицательная на отрезке $\phi=[\alpha;\beta]$ функция в полярной системе координат, то фигура, ограниченная отрезками лучей $\phi=\alpha,\phi=\beta$ и графиком $\rho=\rho(\phi)$, названная **криволинейным сектором**, имеет площадь, равная

$$P=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\phi)\,d\phi$$

В данном примере область ограничена двумя заданными линиями, первая из которых задает самую что ни на есть окружность. Для простоты мы можем посчитать сначала ее площадь, а зачем вычесть площадь верхнего «лепестка розы», заданной вторым уравнением.

$$P_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2\sin\phi)^2 d\phi=\frac{4}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\phi\, d\phi=\int_0^{\pi}(1-\cos 2\phi)d\phi=(\phi-\frac{\sin 2\phi}{2})\Big|_0^{\pi}=\pi \ ,$$

$$P_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(-2\sin 3\phi)d\phi=\frac{4}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\sin^2 3\phi\, d\phi=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(1-\cos 6\phi)d\phi=(\phi-\frac{1}{6}\sin 6\phi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}=$$

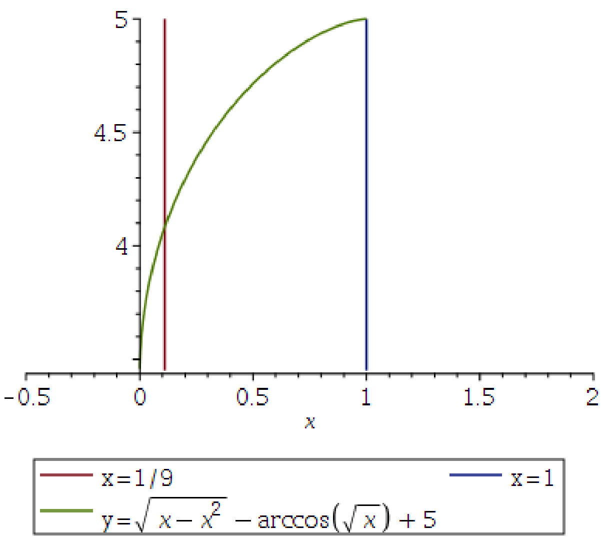
$$=\frac{2\pi}{3}-0-\frac{\pi}{3}+0=\frac{\pi}{3}$$

$$P=P_1-P_2=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

Ответ: $P=\frac{2\pi}{3}$.

Найти длину дуги кривой:

6. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5,\quad \frac{1}{9}\le x\le 1$



Если функция $y=f(x)$ непрерывна и ограничена на отрезке $[a;b]$, и ее график на данном промежутке представляет собой кривую, то длина ее дуги на отрезке выражается формулой

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Посчитаем отдельно $f'^2(x)$:

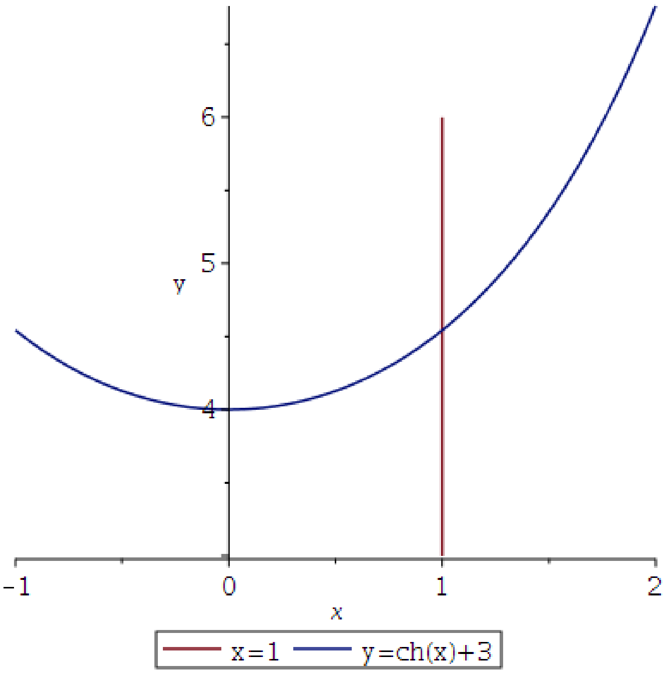
$$f'^2(x)=\left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\right)^2=\frac{(2-2x)^2}{4(x-x^2)}=\frac{(1-x)^2}{x(1-x)}=\frac{1-x}{x}$$

Подставим в формулу:

$$l(\Gamma)=\int_{\frac{1}{9}}^{1}\sqrt{1+\frac{1-x}{x}}\,dx=\int_{\frac{1}{9}}^{1}x^{-\frac{1}{2}}dx=2x^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{9}}^{1}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Ответ: $l(\Gamma)=\frac{4}{3}$

7. $y = ch(x) + 3, \quad 0 \le x \le 1$



Вспомним, что такое гиперболический косинус:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Посчитаем квадрат производной и подставим результат в формулу:

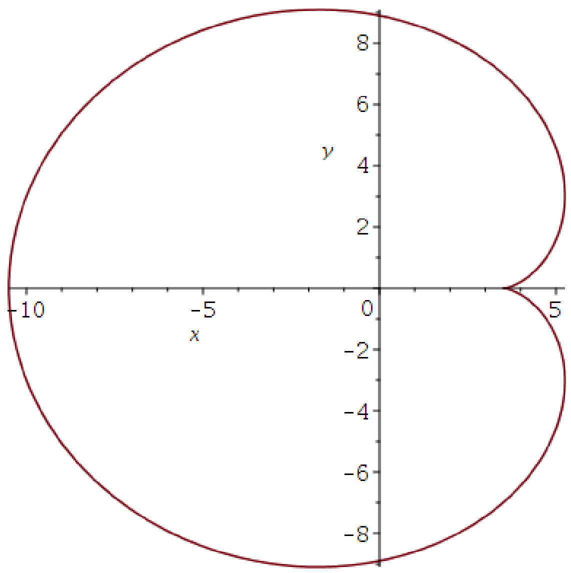
$$ch'^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = sh^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-x}}{4}$$

$$l(\Gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2}x}}{2}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx =$$

$$= sh(x)\Big|_0^1 = sh(1) - 0 = sh(1)$$

Ответ: $l(\Gamma) = sh(1)$.

8. Кардиоиды, заданной параметрически $\begin{cases} x = 3.5(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3.5(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



Если Γ — непрерывно дифференцируемая кривая, то она является спрямляемой и ее длина равна

$$l(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt\,,\quad t\in[\alpha;\beta]$$

Посчитаем квадраты производных каждого уравнения и подставим в формулу:

$$x'^2(t)=(3.5(-2\sin t+2\sin 2t))^2=49(\sin 2t-\sin t)^2$$

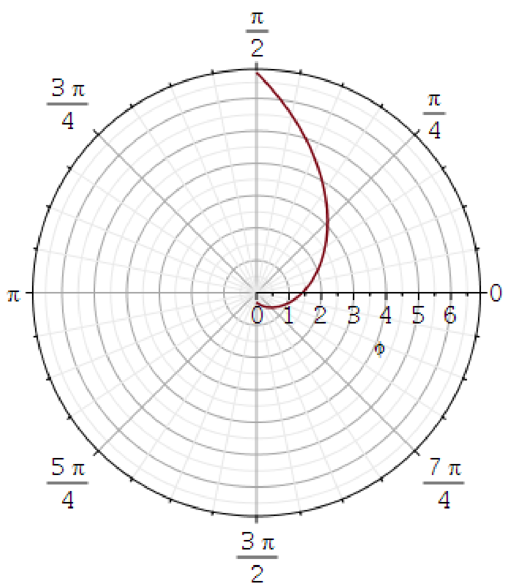
$$y'^2(t)=(3.5(2\cos t-2\cos 2t))^2=49(\cos t-\cos 2t)^2$$

$$x'^2(t)+y'^2(t)=49((\sin 2t-\sin t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2)=$$
$$=49(\sin^2 2t-2\sin 2t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t-2\cos 2t\cos t+\cos^2 2t)=$$
$$=49(2-2\sin 2t\sin t-2\cos 2t\cos t)=98(1-\frac{1}{2}(\cos t-\cos 3t)-\frac{1}{2}(\cos t+\cos 3t))=$$
$$=98(1-\cos t)$$

$$l(\Gamma)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{98(1-\cos t)}\,dt=\sqrt{98}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=14\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{t}{2}\,dt=-28\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-14\sqrt{2}+28$$

Ответ: $l(\Gamma)=-14\sqrt{2}+28.$

9. $\rho(\phi)=\sqrt{2}\,e^{\phi},\quad -\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$



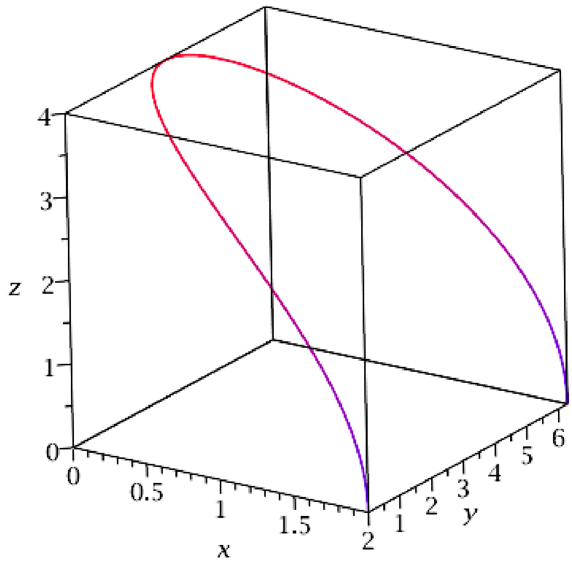
Если кривая, заданная в полярной системе координат, имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$, то длина дуги на нем выражается формулой

$$l(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\phi)+\rho'^2(\phi)}\,d\phi$$

$$l(\Gamma)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sqrt{2}e^{\phi})^2+((\sqrt{2}e^{\phi})')^2}\,d\phi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4e^{2\phi}}\,d\phi=2e^{\phi}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}})$$

Ответ: $l(\Gamma)=2(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}).$

10. $\begin{cases} x=1+\cos t \\ y=t-\sin t \\ z=4\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}, \quad 0\le t\le 2\pi$



Аналогичным образом рассматриваются пространственные кривые: если функции $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ непрерывны на $[a;b]$ и имеют на отрезке непрерывные производные, то кривая непрерывно дифференцируемая и ее длина равна

$$l(\Gamma)=\int_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt \quad .$$

$$l(\Gamma)=\int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos t)'^2+(t-\sin t)'^2+\left(4\sin\frac{t}{2}\right)'^2}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t+1-2\cos t+\cos^2 t+4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t+4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t+2+2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi} 2\,dt=2t\,\Big|_0^{2\pi}=4\pi.$$

Ответ: $l(\Gamma)=4\pi.$

Заключение

Примеры показывают, что некоторые задачи содержат функции, заданные разными видами уравнений и в разных системах координат, и потому их решение совмещает несколько свойств определенного интеграла.

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: учеб. для студентов университетов и вузов. В 3 т. Т.1. – 2-е изд., перераб. И доп. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. Шк., 1988. – 712 с.: ил.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I. – 3-е изд., перераб. и доп. / С.М. Никольский. – М: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 464 с.
3. Злыгостев. А.С. Библиотека по математике [Электронный ресурс] / А.С. Злыгостев, Н.А. Колпачёва. – электрон. текст. дан. – [2001-]. - Режим доступа: http://mathemlib.ru, свободный.
4. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. – электрон. Текст. дан. – 2009. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org, свободный.