Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»
Математический факультет
Кафедра математического анализа
Специальность «Компьютерная безопасность»

КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Функции нескольких переменных. Числовые ряды

Выполнил:
Кокорин Д.А., группа 24

Проверил:
д.ф.- м.н., профессор
Шеретов Ю.В.

Тверь 2018

Задания для курсовой работы
«Функции нескольких переменных. Числовые ряды»
студента группы М-24 математического факультета
Кокорина Д.А.

1. Выписать уравнение нормали к графику функции
$$z = 2(x-1)^2 + y^2 + 2$$
в точке $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3)$. Определить точку пересечения нормали с плоскостью $z = 0$.

2. Найти угол между градиентами функции
$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3z^2)$$
в точках $(x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 0)$ и $(x_2, y_2, z_2) = (0, 1, 1)$.

3. Найти производную функции $u = x^2 + xy + 2y^2 + x$ в точке $(x_0, y_0) = (1, 1)$ в направлении биссектрисы третьего координатного угла.

4. Исследовать на локальный экстремум функцию
$$u = 9x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 8y + 6.$$

5. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

6. С помощью признака Коши исследовать на сходимость числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

7. С помощью признака сравнения исследовать на сходимость числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{n}{n^2+1}.$$

8. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}.$$

1. Нормалью, или нормальной прямой к графику $\Gamma_f = \{(x;y;f(x;y)):(x;y)\in D\}$ функции $z=f(x;y):D\to\mathbb{R}\ (D\subset\mathbb{R}^2)$, непрерывной в точке $(x;y)\in D$, называется прямая, проходящая через точку графика $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$ перпендикулярно касательной плоскости π к графику в этой точке (плоскость называется касательной плоскостью к графику Γ_f в точке $M_0(x_0;y_0;f(x_0;y_0))$, если при приближении произвольной точки $M_1\in\Gamma_f$ к M_0 угол между прямой M_0M_1 и её проекцией на плоскость π стремится к нулю).
   Уравнение нормали имеет вид:
$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Итак, имеется функция $z=2(x-1)^2+y^2+2$ и точка $(x_0;y_0;z_0)=(1,1,3)$. Найдём частные производные по переменным x и y в точке:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)=4x_0-4=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)=2y_0=2$$

Если вместо x_0 и y_0 подставить координаты известной точки, то получатся в точности эти равенства.

Уравнение нормали будет выглядеть так:
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{-1}\quad(1)$$

Чтобы найти точку пересечения нормали с плоскостью $z=0$ (2), нужно совместно решить систему уравнений (1) и (2). Проще всего это сделать с помощью параметрических уравнений прямой:
$$\begin{cases}x=x_0+mt\\ y=y_0+nt\\ z=z_0+pt\end{cases},$$
где m,n,p – координаты вектора, коллинеарного нормальной прямой (т.е., знаменатели дробей в уравнении (1)). Подставив в (2) наш z, получаем уравнение относительно t:

$3+(-1)t=0;\ t=3$

Возвращаясь к параметрическим, подставим найденный параметр:
$$\begin{cases}x=1+0*3\\ y=1+2*3\\ z=3+(-1)*3\end{cases};\quad\begin{cases}x=1\\ y=7\\ z=0\end{cases}$$
Они и будут служить координатами точки пересечения нормали (1) и плоскости (2), т.е. мы нашли точку $M(1;7;0)$.

2. Пусть функция $z = f(x; y)$ задана в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$. Градиентом функции в точке $(x_0; y_0)$ называется вектор $grad\, f(x_0; y_0) \equiv \nabla f(x_0; y_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0); \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right)$.

Найдём координаты градиентов функции $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 3z^2)$ в точках $(x_1; y_1; z_1) = (1, 1, 0)$ и $(x_2; y_2; z_2) = (0, 1, 1)$, посчитав частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_1; y_1; z_1) = x_1 = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x_2; y_2; z_2) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_1; y_1; z_1) = y_1 = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_2; y_2; z_2) = y_2 = 1$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}(x_1; y_1; z_1) = 3z_1 = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial z}(x_2; y_2; z_2) = 3z_2 = 3$$

$$\nabla f(x_1; y_1; z_1) = (1, 1, 0) \qquad \nabla f(x_2; y_2; z_2) = (0, 1, 3)$$

Угол между векторами находим через формулу косинуса угла:

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \cdot \sqrt{0 + 1^2 + 3^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{20}} \;\; => \quad \alpha \approx 77.08°.$$

3. Пусть выполнены условия из предыдущего задания, а также имеется градиент функции f в точке $(x_0; y_0)$. Производной функции в этой точки в направлении вектора $\bar{l} \neq \bar{0}$ называется число:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x_0; y_0) = \frac{1}{|\bar{l}|}\big(\nabla f(x_0; y_0), \bar{l}\big)$$

В нашей задаче биссектриса третьего координатного угла есть прямая, делящая пополам III четверть в декартовой СИ. Легко найти его направляющий вектор: $\bar{l} = (-1, -1)$.

Осталось найти градиент f в точке (1,1) и скалярное произведение последних двух векторов:

$$\nabla f(x_0; y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0)\right) = (2x_0 + y_0 + 1, 4y_0 + x_0) =$$
$$= (4, 5)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(x_0; y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(4 * (-1) + 5 * (-1)\big) = -\frac{9}{\sqrt{2}}.$$

4. Рассмотрим функцию от двух переменных $z = f(x; y)$, заданную в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $(x_0; y_0) \in D$ – некоторая точка.

Если существует проколотая окрестность этой точки $\left(\exists\dot{U}_\varepsilon(x_0;y_0)\right)$ такая, что во всякой её точке значение функции не превосходит значение в точке $(x_0;y_0)$ $\left(\text{в матем. записи:} \, \forall(x;y) \in \dot{U}_\varepsilon(x_0;y_0): f(x;y) \le f(x_0;y_0)\right)$, то говорят, что f в точке $(x_0;y_0)$ имеет локальный максимум $\left((x_0;y_0) - \text{точка локального максимума}\right)$.

Аналогично, в случае неравенства $f(x;y) \ge f(x_0;y_0)$ приходим к понятию локального минимума.

Точки лок. максимума и лок. минимума называют точками экстремума.

Для исследования функции на экстремум будем ориентироваться на необходимое и достаточное условия локального экстремума.

Необходимое условие экстремума: если функция $z = f(x;y)$ в точке $(x_0;y_0) \in D$ имеет локальный экстремум, то эта точка является критической (критической называется точка, в которой либо хотя бы одна из первых частных производных функции не существует, либо все такие производные обращаются в ноль).

Достаточное условие экстремума: положим $\Delta = A_0C_0 - B_0^2$, $A_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0), B_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0;y_0), C_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0)$. Тогда:

1) Если $\Delta > 0, A_0 > 0$, то $(x_0;y_0)$ – точка лок. минимума функции f;
2) Если $\Delta > 0, A_0 < 0$, то $(x_0;y_0)$ – точка лок. максимума f;
3) Если $\Delta < 0$, то в точке $(x_0;y_0)$ локального экстремума нет;
4) Если $\Delta = 0$, то в т. $(x_0;y_0)$ экстремум может быть, а может и не быть.

Будем пользоваться этими условиями для нахождения экстремумов функции $u = 9x^2 + 4y^2 + 2xy + 6x - 8y + 6$.

1) Найдём точки, подозрительные на экстремум, исходя из необходимого условия. Решим систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 18x + 2y + 6 = 0 \\ 8y + 2x - 8 = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = -\frac{16}{35} \\ y = \frac{39}{35} \end{cases}$$

Итак, мы нашли точку $M\left(-\frac{16}{35};\frac{39}{35}\right)$, подозрительную на экстремум.

2) Пользуясь достаточным условием, найдём такое число:

$$\Delta = A_0C_0 - B_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0;y_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_0;y_0) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x_0;y_0) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0;y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 140$$

Поскольку $\Delta = 140 > 0$, то $M\left(-\frac{16}{35};\frac{39}{35}\right)$ – точка лок. минимума функции u.

5. Пусть дан строго положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (1)$$

и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Признак Даламбера сходимости числового ряда гласит:

Если $l < 1$, то ряд (1) сходится; если $l > 1$, то ряд (1) расходится. Если же $l = 1$, то (1) может как сходиться, так и расходиться.

Итак, найдём предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^n}{n^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(второй замечательный предел).

Т.к. $l = e > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ расходится.

6. Пусть дан положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (1)$$

и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Признак Коши сходимости ряда описан так:

1) Если $k < 1$, то ряд (1) сходится;
2) Если $k > 1$, то (1) расходится;
3) Если $k = 1$, то ряд (1) может как сходиться, так и расходиться.

Ход решения:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$

Т.к. $k = \frac{2}{e} < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится.

7. Воспользуемся признаком сравнения рядов в предельной форме.

Пусть даны строго положительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, где $0 < l < +\infty$. Тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Выпишем общий член суммы – это $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{n^2+1}$. Для первого множителя нам известна эквивалентная бесконечно малая функция $\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left(x \sim \sin x \text{ при } x \to 0\right)$. Рассмотрим отдельно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Он сравним с, очевидным образом, расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Таким образом, исходный ряд мы можем сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} * \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Осталось показать, что, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ равен отличной от нуля и +беск. константе, то ряды (1) и (2) сходятся одновременно.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{n^2+1}n^{\frac{3}{2}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} * \frac{n^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1 \neq$$
$0 \;\&\; 1 \neq \infty$.

Раз $l = 1$, и ряд (2) сходится (т.к. показатель $\frac{3}{2} > 1$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{n}{n^2+1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходятся одновременно, а из этого следует сходимость исходного ряда.

8. Воспользуемся признаком Дирихле сходимости числовых рядов.
Пусть дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (1), причём последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю и последовательность $\{B_n'\}$ частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2) ограничена. Тогда ряд (1) сходится.

Исходный ряд соответствует условиям признака, поскольку $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ – очевидно, монотонно стремящаяся к нулю последовательность при $n \to \infty$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n$. Утверждение о сходимости исходного ряда будет верно, если мы докажем, что последовательность $\{B_n'\}$ частных сумм последнего ограничена.

Итак, напишем n-ую частную сумму ряда (2):

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\sin 2k = \sin 2 + \sin 4 + \dots + \sin 2n$$

В общем случае, мы можем переписать данную сумму для произвольного аргумента *2x:*

$$\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx =$$
$$= \frac{\sin 2x * \sin x + \sin 4x * \sin x + \dots + \sin 2nx * \sin x}{\sin x} =$$
$$= \frac{1}{2\sin x}((\cos x - \cos 3x) + (\cos 3x - \cos 5x) + \cdots$$
$$+ (\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x) = \frac{\cos x - \cos(2n+1)x}{2\sin x} =$$
$$= \frac{\sin(n+1)x * \sin nx}{\sin x}$$ (со школы мы знакомы с формулами:

$\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) * \cos(\alpha+\beta))$;

$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$).

Учитывая то, что в нашем ряду $x = 1$, получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin 2k = \frac{\sin(n+1) * \sin n}{\sin 1}$$

Последний ряд исследуем на сходимость, сравнивая с дробью:

$$\frac{1}{\sin 1} \geq |B_n| = \left|\frac{\sin(n+1)\sin n}{\sin 1}\right|, n = 1,2, \ldots$$

Из неравенства ряд (2) сходится, значит сходится и ряд (1) из признака Дирихле.

Ряд сходится абсолютно, если одновременно сходятся (1) и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin 2n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{n} \ (3)$$

Воспользуемся признаком сравнения:

$$\frac{|\sin 2n|}{n} \geq \frac{\sin^2 2n}{n} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos 4n)}{n} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{n} - \frac{1}{2} * \frac{\cos 4n}{n}$$ (из школы знакома формула: $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{(1-\cos x)}{2}$).

В правой части последнего неравенства уменьшаемое сравнимо с расходящимся гармоническим рядом $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который мы уже рассматривали в предыдущих заданиях. А вычитаемое – с рядом $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{n}$, и его сходимость доказывается аналогично сходимости исходного ряда.

Таким образом, ряд (3) расходится, значит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$$

не сходится абсолютно, но сходится *условно*.