Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное

Учреждение высшего образования

 «Тверской государственный университет»

(ФГБОУ ВО ТвГУ)

Математический факультет

Кафедра общей математики и математической физики

Специальность «Математика и компьютерные науки»

КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине «Комплексный анализ»

Тема: «Исследование голоморфных функций в системе Maple»

Автор: Павлова Ариадна Николаевна, 3 курс, 31 группа

Научный руководитель: Кандидат физико-математических наук, доцент, Чемарина Юлия Владимировна

Тверь 2016

Содержание

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc469430021)

[I.ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 4](#_Toc469430022)

[1.1 Понятие голоморфных функции (комплексного переменного) 4](#_Toc469430023)

[1.2 Понятие производной 5](#_Toc469430024)

[1.3 Правила дифференцирования 7](#_Toc469430025)

[1.4 Условия Коши-Римана 8](#_Toc469430026)

[1.5 Сжатие и растяжение плоскости. 10](#_Toc469430027)

[1.5.1 Геометрический смысл аргумента производной. 10](#_Toc469430028)

[1.5.2 Геометрический смысл модуля производной. 13](#_Toc469430029)

[1.6 Восстановление функции комплексной переменной по ее действительной и мнимой части 14](#_Toc469430030)

[II. ИССЛЕДОВАНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В СИСТЕМЕ MAPLE. 18](#_Toc469430031)

[2.1 Понятие о функциях в системе Maple 18](#_Toc469430032)

[2.2. Исследование дифференцируемости функции, условия Коши – Римана, вычисление производной. 19](#_Toc469430033)

[2.3 Сжатие и растяжение плоскости 22](#_Toc469430034)

[2.3.1 Геометрический смысл производной 22](#_Toc469430035)

[2.3.2 Модуля производной 22](#_Toc469430036)

[2.3.3 Аргумента производной 22](#_Toc469430037)

[ВЫВОДЫ 26](#_Toc469430038)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 27](#_Toc469430039)

# ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованиям в области комплексного анализа и касается изучения голоморфной функции в системе компьютерной алгебры Maple. Данная тема очень актуальна в наше время.

Передо мной стояли следующее задачи:
1. Изучение условия Коши-Римана.

2. Геометрический смысл производной.

3. Восстановление плоскости по реальной и мнимой части.

4. Исследование теории комплексного переменного в системе Maple.

Объект исследования – система компьютерной алгебры Maple.

# I.ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1 Понятие голоморфных функции (комплексного переменного)

**Функция (отображение)** – в математике соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества. Дадим далее понятие функции комплексного переменного.

Пусть даны две плоскости комплексных чисел вида и .(Рис. 1)

Рис.1

Рассмотрим некоторое множество точек в плоскости и множество . Если каждому числу по некоторому закону поставлено в соответствие определенное комплексное число , то говорят, что на множестве задана однозначная функция комплексного переменного, отображающая множество Символически это обозначают так:

 (1)

Множество называют областью определения функции Если каждая точка множества является значением функции, то говорят, что область значений этой функции.

Функцию можно записать в виде

 (2)

где

 (3)

являются действительными функциями от переменных

Если каждому соответствует несколько разных значений , то функция (1) называется **многозначной**.

## 1.2 Понятие производной

Понятие производной для функции комплексного переменного вводится так же, и для функции действительного переменного.

Пусть функция определена в некоторой окрестности окрестности точки . Если существует конечный предел отношения при то этот придел называется производной функции в точке и обозначается а функция дифференцируемой в точке

Таким образом,

 . (1)

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Обозначим приращение функции соответствующее приращениюнезависимого переменного, через Тогда соотношение примет вид

 *.*

Равенство означает, что для любого существует такое, что неравенство

Имеет место, если

Из

Обратно, если приращение

Где А комплексная постоянная, не зависящая от то функция дифференцируема

Таким образом, равенство является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции

Из , в частности, следует, что функция, дифференцируемая в точке непрерывна в этой точке.

Пример 1. Функция дифференцируема во всей комплексной плоскости и её производная равна нулю:
 т.е.

Пример 2. Функция ( - целое) дифференцируема во всей комплексной плоскости, так как

,

Следовательно,

 . (4)

В частности, функция всюду дифференцируема и .

Замечание 1. В определении производной содержится требование, чтобы предел (1) не зависел от способа стремления к . Это накладывает на дифференцируемую функцию комплексного переменного значительно более сильные ограничения, чем на дифференцируемую функцию действительного переменного.

Если существует производная , то отношение имеет один и тот же предел при по любому пути и, в частности, по любому из бесчисленного множества различных лучей, выходящих из точки . Отметим следующее важное отличие функций комплексного переменного от функций действительного переменного: функция комплексного переменного, дифференцируемая в области, обладает производными всех порядков в этой области.

## 1.3 Правила дифференцирования

Из определения производной и свойств пределов вытекает, что за функции комплексного переменного распространяются известные из курса математического анализа правила дифференцирования.

1. Если функции и дифференцируемы в точке , то их сумма, произведение и частное (при ) также дифференцируемы в этой точке и имеют место равенства

,

*, (5)*

*.*

1. Если функция дифференцируема в точке , а функция дифференцируема в точке , то функция дифференцируема в точке , причем

*. (6)*

Замечание 2. В § 4 было отмечено, что непрерывность функции комплексного переменного в точке равносильна непрерывности функции и в точке . Аналогичное утверждение не имеет места для дифференцируемости. Именно, требование дифференцируемости функции налагает дополнительные условия на частные производные функции и .

## 1.4 Условия Коши-Римана

**Теорема.** Для того чтобы функция была дифференцируема в точке необходимо и достаточно, чтобы

1. Функции и были дифференцируемы в точке ;
2. В точке выполнились условия Коши – Римана

При выполнении условий теоремы для производной имеет место формула

*.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть функция дифференцируема в точке . Тогда в силу равенства имеем

,

Выделяя в действительные и мнимые части, находим

Напомним, что действительная функция в том и только в том случае, если ее приращение представляется в виде

и не зависят от и , при этом имеют место равенства

.

 при .

Используя неравенство получаем

 откуда

и, следовательно, найдем, что Таким образом, и в формулах (11) удовлетворяют условиям(12), и поэтому функции и дифференцируемы в точке

Из равенств находим

 ,

 Откуда следует условия Коши - Риманаи формула , так как Отметим, что производную можно вычислить не только по формуле , но так же с помощью одной из следующих формул:

**Достаточность.** Пусть функции и дифференцируемы в точке и пусть выполняются условия . Тогда имеют место равенства , где и складывая с первым, получаем

или

где откуда в силу вытекает дифференцируемость функции в точке **Теорема доказана.**

## 1.5 Сжатие и растяжение плоскости.

### 1.5.1 Геометрический смысл аргумента производной.

Пусть есть функция, аналитическая в области . Значение функции будем изображать точками в плоскости . Каждой точке в плоскости независимого переменного будет соответствовать одна точка в плоскости функции (рис.2 и 3). При движении точки z в плоскости по некоторой линии соответствующая ей точка линию , являющуюся образом линии Пусть произвольная точка области и линия, данная вместе со своим направлением, выходящая из этой точки и имеющая определенную касательную в точке Предположим, что В плоскости



 Рис.2 Рис.3

образом линии будет линия , выходящая из точки Если уравнение произвольно выбранной лини есть (0, то уравнение линии получим, если заменим в равенстве переменное через : (0

Чтобы выяснить геометрический смысл производной представляем комплексное число и выясним геометрическое значение аргумента производной и ее модуля Возьмем произвольную точку на линии и обозначим через соответствующую ей току на плоскости лежащую на линии При стремлении точки по линии к точке соответствующая ей точка движется по линии к точке , причем и одновременно стремится к нулю. Из равенства

находим: (1)

 (2)

(с точностью до кратных 2 Здесь входит требование, чтобы так как в противном случае угол не имел бы определенного значения. Рассмотрим ближе равенство (2). Так как аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя, то

и равенство(2) примет вид

Выясним геометрический смысл равенства , пользуясь рис. 2 и 3. Очевидно, изображается вектором, соединяющим точку так же есть вектор, идущий от точки к точке Следовательно, есть угол между положительным направлением оси и соответствующим вектором а есть угол оси с вектором Таким образом, равенство (2 будет вида

. (2

В пределе направление вектора совпадает с направлением касательной к линии в точке , а направление вектора - направлением касательной к линии в точке (рис.3), которая необходимо должна существовать вследствие равенства (2 Обозначая через и углы осей и соответственно с касательными к линиям и в точках и перепишем (2

 или (3)

Будем считать положительные направления осей и совпадающими между собой. Тогда из равенства (3) усматриваем, что есть угол, на который поворачивается касательная к линии в точкепри отображении или, иначе есть угол между первоначальным и отображенным направлениями. Существенно важно заметить, что линию мы берем произвольной; при изменении направления линии будут изменяться и но остается постоянным. Следовательно, проводя из точки другую линию и обозначая (рис.2 и 3), мы можем заключить, что равенство(3) останется в силе для этой пары линий. Оно примет вид

 (3

Где и суть значения соответственно и для линий и Вычитая (3) из равенства (3 получим:

(4)

Заметив, что к линиям и - соответствующий угол для и , усматриваем из равенства (4) следующие: две произвольные линии, выходящие из точки, отображаются в две соответствующие линии, выходящие из точки , так что угол между касательными к данным и отображенным линиям будет один и тот же как по величине, так и по направлению. Это значит, что если положительное направление линии путем поворота на некоторый угол линии переходит в направление линии путем поворота на тот же угол и в том же направлении. Итак, отображение с помощью аналитической функции обладает свойством сохранения (консерватизма) углов во всех точках, где производная не равна нулю.

### 1.5.2 Геометрический смысл модуля производной.

После того как мы выяснили геометрический смысл аргумента производной, обратимся к рассмотрению её модуля. Равенство (1) может быть записано так:

 (1)

Геометрически обозначает длину вектора , т.е. расстояние между точками и (рис.2); аналогично есть расстояние между соответствующими точками и (рис.3). Равенство (1) показывает, что отношение бесконечно малого расстояния между отображенными точками к бесконечно малому расстоянию между первоначальными точками, в пределе равное , не зависит от направления линии *C.* Из этого ясно, можно рассматривать как величину масштаба в точке при изображении с помощью функции . Если , то масштаб увеличивается, т.е. происходит растяжение произвольного бесконечно малого элемента, выходящего из точки ; если , то, наоборот, происходит сжатие при масштаб остается неизменным, т.е. бесконечно малый элемент, выходящий из точки , заменяется ему эквивалентному бесконечно малым элементом, выходящим из точки .

Так как зависит только от и не зависит от направления , то масштаб – его обычно называют искажением в данной точки - будет одним и тем же независимо от направления. Таким образом, можно сказать , что изображение с помощью аналитической функции обладает в каждой точке , где , растяжением, не зависящим от направления.

## 1.6 Восстановление функции комплексной переменной по ее действительной и мнимой части

Условия Коши-Римана, которые также в некоторых источниках называются условиями Даламбера-Эйлера - соотношения, связывающие вещественную   и мнимую   части всякой дифференцируемой функции комплексного переменного ,

где

Для того чтобы функция , которая определена в некоторой области комплексной плоскости  , была дифференцируема в точке  , необходимо и достаточно, чтобы её вещественная и мнимая части  и   были дифференцируемы в точке   как функции вещественных переменных   и   и в этой точке выполнялись условия Коши-Римана:

Эти условия впервые появились в работе французского ученого-энциклопедиста, философа, математика и механика Жана Лерона Даламбера (1717 - 1783) в 1752 году. В работе швейцарского, немецкого и российского математика и механика Леонардо Эйлера (1707 - 1783), доложенной Петербургской академии наук в 1777 году, условия получили впервые характер общего признака аналитичности функций. Великий французский математик и механик Огюстен Луи Коши (178 9- 1857) пользовался этими соотношениями для построения теории функций.

Пусть задана действительная часть   функции комплексной переменной . Требуется найти мнимую часть  этой функции. Найти саму функцию , используя некоторое начальное условие.

Алгоритм решения состоит в следующем:

**1)** Используя условия Коши-Римана, находим мнимую часть   .

**2)** Когда и действительная, и мнимая части функции   известны, составляем функцию   . Далее в полученном выражении надо произвести такие преобразования, чтобы выделить переменную  или , то есть "избавиться" от переменных   и   .

Замечание 1. На практике будут полезны соотношения:

Замечание 2. Поделить на мнимую единицу   равносильно умножению на  .

**3)** В конечном итоге будет получена функция , выражение которой содержит только комплексную переменную   и константы. Используя начальное условие, если оно задано, находим значение константы и окончательно получаем искомую функцию.

Аналогично по известной мнимой части  можно найти действительную часть  . Алгоритм решения практически идентичен.

Пример. **Задание.** По действительной часть  функции комплексной переменной восстановить мнимую часть  данной функции и составить саму функцию, которая удовлетворяет начальному условию  .

**Решение.** 1) Сначала найдем мнимую часть   функции  . Из первого условия Коши-Римана имеем, что

то есть

Тогда

Если мы продифференцируем последнее равенство по   (то есть найдем   ), то как раз получим . Отсюда

Неизвестной остается функция  .

Согласно второму условию Коши-Римана имеем:

то есть

Из последнего равенства определяем, что

Итак,

2) Мнимая часть искомой функции   восстановлена, тогда можем записать саму функцию:

Далее наша задача так сгруппировать слагаемые, чтобы выделить переменную  или какую-либо ее степень. Раскроем скобки и перепишем полученное выражение следующим образом:

=

==

=

Тогда согласно замечанию 1 первую скобку свернем как квадрат суммы, а согласно замечанию 2 во вторых скобках преобразуем выражение. Имеем, что:

Итак, получили, что в выражении искомой функции  присутствует только переменная  и константа.

3) Используя начальное условие , найдём значение константы   . Для этого в выражении функции   заменим на 0,  также равно 0, будем иметь:

Таким образом,

С учетом того, что  , запишем, что мнимая часть  .

**Ответ.**  ,

# II. ИССЛЕДОВАНИЕ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В СИСТЕМЕ MAPLE.

## 2.1 Понятие о функциях в системе Maple

Теперь мы плавно переходим в Maple – систему компьютерной алгебры. В Maple **функция** – это имеющий уникальное имя (идентификатор) объект математического выражения, выполняющий некоторое преобразование своих входных данных, представленных списком **входных параметров**. Суть этого преобразования соответствует некоторой функциональной зависимости возвращаемого функцией значения от входных параметров функции.

Входные параметры изначально являются **формальными** и представляются именами некоторых переменных. Особенностью функции является возврат его значения в ответ на обращение к функции по имени с указанием **фактических** параметров в списке параметров функции. Фактические параметры могут быть различными константами, определенными переменными и даже вычисляемыми математическими выражениями.

Функции обычно подразделяют на четыре типа:

1. Встроенные в ядро системы предопределенные функции или внутренние функции;
2. Функции пользователя;
3. Библиотечные функции, вызываемые из пакетов или библиотек расширения системы;
4. Функции, заданные в виде программного модуля.

Кроме того, функции можно классифицировать по характеру производимых ими преобразований входных параметров. Они делятся на алгебраические, тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические, показательные и так далее.

## 2.2. Исследование дифференцируемости функции, условия Коши – Римана, вычисление производной.

Пример 1. Определить, существует ли область D, в которой функция дифференцируема; найти производную при .

**Теорема.** Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке

1. Существовали непрерывные частные производные и
2. Выполнялись в точке **условия Коши-Римана**:

Следовательно, для исследования функции на дифференцируемость и нахождения ее производной следует выполнить следующие операции.

1. Для заданной функции найти действительную и мнимую части:

 .

1. частные производные функций
2. Точки, в которых эти условия не выполняются, являются точками, где функция не дифференцируема. Точки, в которых условия выполняются и частные производные являются непрерывными, принадлежат искомой области D, где функция дифференцируема.
3. Записать выражение производной в точках дифференцируемости по одной из формул:

,

1. Определим функцию и найдем ее действительную и мнимую части:
2. Найдем частные производные функции
3. *Проверим выполнение условий Коши-Римана:*

*=-*

*= -*

*2*

*2*

*= -*

sove(

Выполнение условий Коши-Римана является необходимым условие дифференцируемости функции в точке. Следовательно, их не выполнения достаточно в соответствующей точке. Таким образом, если система не имеет решений, то функция нигде не дифференцируема.

Условия Коши-Римана не является достаточным. В соответствующей точке должны быть дифференцируемы функции и Напомним, что условием дифференцируемости функции двух действительных переменных в точке являются существование и непрерывность частных производных в этой точке. Не забывайте, что Maple не умеет проверять непрерывность!

*:*

 *then*

 *`*

`simplify(subs(y=-l/2\*(z*-conjugate(z)),*

 end if;

Условия Коши-Римана выполнены на множестве D1={{

Обратите внимание, что D1 это всего лишь множество, где выполнены условия Коши - Римана. Оно же является множеством D, на котором дифференцируема функция, если частные производные функции и на нем непрерывны. В данном случае очевидно, что все частные производные функций функции и непрерывны во всей плоскости, в том числе и в точке 0.

Функция дифференцируема лишь в точке ее производная

## 2.3 Сжатие и растяжение плоскости

### 2.3.1 Геометрический смысл производной

Производная , как функция комплексной переменной, определяет отображение области , области дифференцируемости функции в область . В каждой точке определено комплексное число , следовательно, определены и , если . Геометрически – число - длина радиуса-вектора, а - угол наклона радиуса-вектора точки , к действительной оси.

Возникает вопрос: как характеризуют эти величины само отображение в точке . Для функции действительной переменной аналогичный вопрос решается просто: производная определяет угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой в точке .

**Геометрический смысл**

2.3.2 Модуля производной состоит в том, что он равен коэффициенту линейного растяжения (сжатия) бесконечно малых векторов в точке :

2.3.3 Аргумента производной состоит в том, что он равен углу повтора бесконечно малых векторов в точке :

 = .

Подробнее с геометрическим смыслом производной функции комплексной переменной можно ознакомиться, например в [6-10].

Замечание: серым цветом залита та часть плоскости, которая сжимается.

Пример 2. Какая часть плоскости растягивается ( сжимается) при отображении, осуществляемом функцией . Найти также коэффициент растяжения и угол поворота в точке .

Аналитическое решение задач такого типа рассматриваются, например, в [2], примеры 3.3-3.6. Поэтому решение данного примера приводится с минимальными комментариями.

Определим функцию и точку, заданные по условию:

>f:=z->-2/z: `f(z)=`f(z); z0:=1;

Найдем коэффициент растяжения и угол поворота в точке .

>W:=z->diff(f(z), z): `f (z)`:=w(z);

>k=abs(`f (z0)`); k:=abs(subs(z=z0,w(z)));

>if k=1 then

>`k=1 – в окрестности точки z0 растяжения(сжатия) нет`

>elif evalf(k)<1 then

>`k<1 – в окрестности точки z0 сжатие`;

>`k<1 – в окрестности точки z0 растяжение`;

> end if;

 *–* в окрестности точки z0 растяжение

>theta:=arg(`f’(z0)`);

>theta:=arg(`f’(z0)‘);

>theta:=argument(subs(z=z0,w(z)));

> if theta=0 then `в окрестности точки z0 поворота нет`

> else `в окрестности точки z0 угол поворота theta`;

> end if;

В окрестности точки z0 поворота нет

Найдем ту часть плоскости, которая при отображении сжимается, обозначим его и на рисунке зальем серым.

>z:=’z’: `f (z)`=w(z);

>abs(`f (z)`)<1;

>abs(w(z))<1;

>z:=x+I\*y: Omega:={evalc(%%)};

Используя стандартные возможности Maple, изобразив множество .

>with(plots):

>p1: implicitplot(Omega, x=-2..2,y=-2..2,scaling=CONSTRAINED,

 Filled=true, linestyle=3,thickness=2,coloring=[grey,white]):

>p2:=textplot([-0.5,0.5,”растяжение”],align=ABOVE,COLOR=blue):

>p3:=textplot([-1,1.5,”сжатие”],align=ABOVE,color=blue):

>p4:=pointplot([Re(z0),Im(z0)],color=black,symbol=CIRCLE, symbolsize=14):

>p5:= textplot([Re(z0),Im(z0)+0.1,”z0”],aligne=ABOVE):

>display(p1,p2,p3,p4,p5);

# ВЫВОДЫ

Итак, в ходе курсовой работы мы показали, как исследуется голоморфная функция в системе компьютерной алгебры Maple, и выполнили основные задачи, а именно:

1. Изучили: дифференцирование функции, условие Коши-Римана, сжатие и растяжение плоскости, а так же восстановление плоскости по реальной и мнимой части.
2. Рассмотрели способы задания функций комплексного переменного в системе Maple.
3. Привели примеры решения задач.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимирский Б. М., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. Б. Математика. Общий курс. СПб.: Лань, 2002.
2. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В,, Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва: НАУКА, 1976.
3. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. СПб.: Издательство «Лань», 2009. - 432с.
4. Т.В. Клачко, Н.Д.Парфёнова Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Харьков 2009.