Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение

Высшего профессионального образования

Тверской государственный университет

Математический факультет

Кафедра общей математики и математической физики

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

По теории функций комплексного переменного

**Тема: «Преобразование Лапласа»**

Выполнила: Бандаева Макка Ахметовна

3-ий курс, 31-ая группа

Научный руководитель:

Кандидат физико-математических наук, доцент

Чемарина Юлия Владимировна

Тверь,2016

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc469538796)

[1. ФУНКЦИЯ - ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ 4](#_Toc469538797)

[1.1. Функция - оригинал 4](#_Toc469538798)

[1.2. Изображение функции 5](#_Toc469538799)

[2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА 6](#_Toc469538800)

[2.1. Свойство линейности 6](#_Toc469538801)

[.2. Теорема подобия 6](#_Toc469538802)

[2.3. Дифференцирование оригинала 6](#_Toc469538803)

[2.4. Дифференцирование изображения 7](#_Toc469538804)

[2.5. Интегрирование оригинала 7](#_Toc469538805)

[2.6. Интегрирование изображения 8](#_Toc469538806)

[2.7. Теорема запаздывания 8](#_Toc469538807)

[2.8. Теорема смещения 9](#_Toc469538808)

[3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ 10](#_Toc469538809)

[3.1. Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений 10](#_Toc469538810)

[3.2. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 11](#_Toc469538811)

[3.3. Решение систем линейных дифференциальных уравнений 12](#_Toc469538812)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 14](#_Toc469538813)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 15](#_Toc469538814)

# ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее плодотворных методов анализа является метод интегральных преобразований, состоящий в том, что вместо исследуемой функции изучается то или иное интегральное преобразование от нее. При этом часто случается, что сложные соотношения для исследуемой функции превращаются в простые соотношения для ее интегрального преобразования.

В качестве преобразования, позволяющего реализовать, указанную выше идею, обычно применяется преобразование Лапласа.

1. **ФУНКЦИЯ - ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ**
   1. **Функция – оригинал**

Функцией-оригиналом называют любую комплексную функцию *f(t)* действительного аргумента *t,* удовлетворяющую следующим условиям:

1 . Функция *f(t)* удовлетворяет условию Гельдера всюду на оси *t,* кроме отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число. Это означает, что для каждого *t* (кроме указанных исключительных точек) существуют положительные постоянные А, и такие, что

(1)

для всех *h, .*

2. Функция *f(t)* для всех отрицательных *t.*

3. Функция *f(t)* возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие постоянные M, , что для всех *t*

(2)

Число есть показатель роста ; для ограниченных оригиналов можно, очевидно, принять .

С точки зрения физических приложений условия и 3 не нуждаются в пояснениях - они, очевидно, выполняются для большинства функций , описывающих физические процессы ( интерпретируется как время). Условие 2 на первый взгляд кажется искусственным. Однако следует иметь в виду, что операционный метод приспособлен к задачам, приводящим к решению дифференциальных уравнений с данными начальными условиями. В таких задачах вся информация о ходе процесса до момента начала наблюдения, за который, конечно, можно принять момент , содержится в начальных условиях. Таким образом, и условие 2 физически вполне естественно.

Простейшей функцией-оригиналом является единичная функция

Очевидно, умножение функции на «гасит» эту функцию для и оставляет без изменения для : если функция удовлетворяет условиям 1 и 3 и не удовлетворяет 2, то произведение

будет удовлетворять и условие 2, т.е. будет оригиналом (например, , , , и т.д.).

* 1. **Изображение функции**

Изображением функции называется функция комплексного переменного , определяемую соотношением

, (3)

где интеграл берется по положительной полуоси.

Фразу: «функция имеет своим изображением » будем записывать символом

или .

1. **ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА**
   1. **Свойство линейности**

Оригиналы будем обозначать через , , а их изображения через :

, .

Свойство линейности получаем непосредственно из свойств интеграла: для любых (комплексных) постоянных и

.

**.2. Теорема подобия**

Для любого постоянного

(4)

В самом деле, полагая имеем

(5)

## Дифференцирование оригинала

Если функция непрерывна при и или вообще является оригиналом, то

(6)

или

, (7)

Где под понимается правое предельное значение .

В самом деле, переходя к изображениям и интегрируя по частям, получаем

.

В силу того, что , имеем и подстановка в первый член дает нуль, подстановка же дает, очевидно, ; второй член равен , и формула (6) доказана. Применив формулу (6) дважды, получим

и т.д.

В частности, если то

, (8)

и дифференцирование оригинала сводится к умножению на его изображения.

## Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения сводится к умножению на оригинала, или вообще

(9)

В самом деле, так как является в полуплоскости аналитической функцией, то ее можно дифференцировать по , и мы получим

(10)

что равносильно формуле (9).

## Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на

Прежде всего, легко проверить, что функция вместе с является оригиналом, т.е. удовлетворяет условиям 1, 2, 3 Тогда в силу формулы (8) (она применима, ибо ) имеем

Таким образом, для изображения имеем откуда

что и требуется.

## Интегрирование изображения

Если интеграл сходится, то он служит изображением функции

(11)

(интегрирование изображения равносильно делению на оригинала).

В самом деле, имеем

Предполагая, что путь интегрирования весь лежит в полуплоскости получим оценку внутреннего интеграла

из которой ясна его равномерная сходимость относительно Поэтому можно изменить порядок интегрирования:

Полученное равенство равносильно формуле (11).

## Теорема запаздывания

Для любого положительного

(12)

(включение оригинала с запаздыванием на равносильно умножению изображения на ).

Так как при то, делая замену переменных получим

,

что и требовалось доказать.

Теорему, в частности удобнее применять при отыскании изображений функций, которые задаются на разных участках различными аналитическими выражениями.

## Теорема смещения

Для любого комплексного

(13)

(«смещение» изображения на равносильно умножению оригинала на ).

Имеем

,

что и требовалось доказать.

Теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту.

1. **ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ**
   1. **Отыскание оригиналов дробно-рациональных изображений**

Для нахождения оригинала по известному изображению , где есть правильная рациональная дробь, применяют следующие приемы:

1. Эту дробь разлагают на сумму простейших дробей и находят для каждой из них оригинал, пользуясь свойствами преобразования Лапласа.
2. Находят полюсы , этой дроби и их кратности. Тогда оригиналом для будет функция (14)

где сумма берется по всем полюсам функции .

В случае если все полюсы функции простые, т.е. , последняя формула упрощается и принимает вид

. (15)

**Пример**. Найти оригинал функции если

способ. Представим в виде суммы простейших дробей и найдем неопределенные коэффициенты Имеем

*.*

Полагая в последнем равенстве последовательно получаем откуда значит,

Находя оригиналы для каждой из простейших дробей и пользуясь свойством линейности, получаем

Второй способ. Найдем полюсы функции . Они совпадают с нулями знаменателя Таким образом, изображение имеет четыре простых полюса . Пользуясь формулой (15), получаем оригинал

.

* 1. **Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами**

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

, (16)

удовлетворяющее начальным условиям (17)

Будем считать, что функция и решение вместе с его производными до второго порядка включительно являются функциями - оригиналами. Пусть По правилу дифференцирования оригиналов с учетом (3) имеем

.

Применяя к обеим частям преобразование Лапласа и пользуясь свойством линейности преобразования, получаем операторное уравнение

(18)

Решая уравнение (18), найдем операторное решение

Находя оригинал для получаем решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям (17).

Аналогично можно решить любое уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и с начальными условиями при .

**Пример**. Решить дифференциальное уравнение операторным методом

(19)

. (20)

Решение. Пусть , тогда по правилу дифференцирования оригинала имеем

Известно, что поэтому, переходя от данной задачи (19)–(20) к операторному уравнению, будем иметь

, откуда , следовательно,

Легко видеть, что функция удовлетворяет данному уравнению и начальному условию задачи.

* 1. **Решение систем линейных дифференциальных уравнений**

Пусть требуется найти решение системы двух уравнений с постоянными коэффициентами

(21)

удовлетворяющее начальным условиям

. (22)

Будем предполагать, что функции , а также и являются функциями-оригиналами.

Пусть

.

По правилу дифференцирования оригиналов с учетом (22) имеем

.

Применяя к обеим частям каждого из уравнений системы (21) преобразование Лапласа, получим операторную систему

Эта система является линейной алгебраической системой двух уравнений с двумя неизвестными и . Решая ее, мы найдем и , а затем, переходя к оригиналам, получим решение системы (21), удовлетворяющее начальным условиям (22).

Аналогично решаются линейные системы вида

*.*

**Пример**. Найти решение системы дифференциальных уравнений операторным методом

удовлетворяющее начальному условию

Решение. Так как и , то операторная система будет иметь вид

Решая систему, получаем

.

Разлагаем дроби, стоящие в правых частях, на элементарные:

Переходя к оригиналам, получим искомое решение

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, идея преобразования Лапласа заключается в следующем: вначале определяется не искомое решение дифференциального уравнения, а функция , являющаяся результатом некоторого преобразования решения причем преобразование выбирают с таким расчетом, чтобы функцию можно было найти значительно проще, чем ; определив находят с помощью обратного преобразования искомое решение .

С помощью преобразования Лапласа легко переходить от сложных понятий математического анализа к простым алгебраическим соотношениям, поэтому оно находит широкое применение во многих областях математики.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евграфов, М.А. Аналитические функции: учебное пособие /

М.А. Евграфов.- 4-е изд., стер.-СПб.: издательство «Лань», 2008.-448с.

2. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат.-6-е изд., стер.-СПб.: издательство «Лань», 2002.-688с.

3. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного: учебник для вузов /

Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц.-2-изд.- СПб.: издательство «Лань», 2002.-304с.