Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное

Учреждение высшего образования

 «Тверской государственный университет»

(ФГБОУ ВО ТвГУ)

Математический факультет

Кафедра общей математики и математической физики

Специальность «Математика и компьютерные науки»

КУРСОВАЯ РАБОТА

По дисциплине «Введение в теорию фракталов»

Тема: «Броуновское движение»

Автор: Козлов Александр Сергеевич, 3 курс, 31 группа

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук, профессор, Цветков Виктор Павлович

Тверь 2016

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

**Введение……………………………………………………………………………3**

**Случайные фракталы……………………………………………………………4**

1. **Броуновское движение ……………………………………………………4**
2. **Определение броуновского движения……………………………………6**
3. **Определение…………………………………………………………………7**
4. **Закон дисперсии и стационарность………………………………………7**
5. **Свойство независимости приращений……………………………………7**
6. **Марковское свойство………………………………………………………8**
7. **Величина приращений ……………………………………………………9**
8. **Недифференцируемость……………………………………………………9**
9. **Размерность реализации броуновского движения……………………10**
10. **Статистическое самоподобие……………………………………………10**
11. **Броуновские поверхности………………………………………………11**

**Заключение……………………………………………………………………… 13**

**Список литературы………………………………………………………………14**

**Введение**

Данная работа посвящена изучению броуновского движения. Главная цель настоящей работы разобрать основные понятия такие как “ одномерные броуновские движения ”, “ гауссовский случайный процесс ” и другие, а так же наглядно рассмотреть графики “ гауссовского случайного блуждания”, “нормальной гауссовской кривой” и “броуновской поверхности”.

1. **Случайные фракталы**
2. **Броуновское движение**

Начало исследования броуновского движения датируется 1827 годом, когда шотландский ботаник Роберт Броун обнаружил, что маленькие частицы, взвешенные в жидкое совершают непрерывное беспорядочное движение. В 1905 году Альберт Эйнштейн объяснил это движение хаотическими столкновениями с молекулами окружающей среды. Норберт Винер в 1923 году построил первую удовлетворительную с математической точки зрения модель выборочных реализаций и доказал их «почти наверное» (на языке теории вероятностей) непрерывность. На сегодняшний день по этому предмету имеется обширная литература. Строгое описание броуновского движения можно найти у Карлина и Тейлора.

Простейшей дискретной аппроксимацией броуновского движения служит одномерное случайное блуждание. В этом случае частица первоначально располагается в точке на прямой. Частица совершает единичный шаг вправо или влево в зависимости от случайного выбора, например, бросания монеты. Случайное блуждание происходит итеративно. Для каждого положим

.

Более точным приближением к реальному броуновскому движению является замена шагов случайными величинами , имеющими гауссовское, или нормальное распределение. После первого шага частица находится в положении , после шагов — в положении

.

На рис. 1. изображена типичная реализация гауссовского случайного блуждания.

Рисунок 1

Случайная величина называется гауссовской, или нормальной с математическим ожиданием и дисперсией , если она распределена по закону:

То есть ее плотность вероятности имеет вид

График напоминает колокол (рис. 2). В наших приложениях математическое ожидание обычно равно нулю.

Гауссовское случайное блуждание легко реализуется на компьютере. Единственная сложность — необходим генератор гауссовских случайных чисел. Если имеется генератор равномерно распределенных на отрезке случайных чисел, то вполне приемлемое приближение можно получить, используя формулу.

(1)

Рисунок 2 Нормированная гауссовская кривая:

Можно использовать и более общую формулу:

(2)

Очевидно, что формула (1) есть частный случай (2) при . Эти аппроксимации следуют из применения центральной предельной теоремы.

1. **Определение броуновского движения**

Мы возвращаемся к рассмотрению броуновского движения, определенного на конечном интервале, например, на отрезке . Приведенное ниже определение позволяет сфокусировать внимание на его принципиальных свойствах. Большинство утверждений о броуновском движении в нашем изложении относится к одномерному случаю, но имеет соответствующие аналоги для случая двух и большего числа измерений.

Прежде всего, нам понадобится определение гауссовского случайного процесса. Случайный процесс называется гауссовским, если для каждого конечного набора моментов времени вектор имеет гауссовское распределение. Двумерный гауссовский процесс определяется аналогично.

1. **Определение**

Гауссовский процесс называется одномерным броуновским движением, или винеровским процессом на интервале , если он обладает следующими свойствами:

1. и функция почти всегда непрерывна.

имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием и дисперсией , где – положительная константа, то есть

1. **Закон дисперсии и стационарность**

Из свойства 2 вытекает закон дисперсии для приращений броуновского движения:

(3)

для любых и из интервала . Так как дисперсия зависит только от разности и , а не от самих значений, то говорят, что приращения стационарны.

1. **Свойство независимости приращений**

Две случайные величины и называются независимыми, если для любых вещественных чисел

Подобное утверждение справедливо и для конечного набора случайных величин. Самым важным следствием независимости случайных величин является равенство математического ожидания произведения случайных величин произведению математических ожиданий:

Броуновское движение обладает независимыми приращениями в том смысле, что если

то приращения

являются независимыми случайными величинами.

1. **Марковское свойство**

Броуновские движение, как и любой процесс с независимыми приращениями, есть марковский процесс. Это означает, что условная вероятность события « достигает определенного значения при данном значении », где , зависит только от и . Эта вероятность не зависит от поведения при , то есть в процессе случайного блуждания каждый шаг делается без какой-либо информации о том, каким образом процесс достиг текущего значения.

Условная вероятность события при заданном событии обозначается . Формальное определение марковского процесса:

где

1. **Величина приращений**
* **Теорема 1**.

Пусть – броуновское движение на интервале . Тогда математическое ожидание приращения равно

(4)

* **Доказательство**

Если случайная величина имеет плотность вероятности , то математическое ожидание функции равно:

Соответственно, при ,

После подстановки и упрощения получаем:

1. **Недифференцируемость**

Из теоремы 1 следует недифференцируемость броуновского движения . Если предположить, что существует, то, рассуждая нестрого, получим:

Мандельброт и Ван Несс дали полное доказательство не только для классического броуновского движения, но также и для фрактального броуновского движения.

1. **Размерность реализации броуновского движения**

Мы используем результат теоремы 1 для вычисления фракцией размерности реализации броуновского движения. Без потери общности можно предположить, что интервал определения равен . Разделим этот интервал на равных подинтервалов одинаковом длины и таким же образом разделим вертикальную ось на подинтервалы длины . Выражение служит в качестве оценки числа квадратов размера , необходимых для покрытия части графика , расположенной над одним подинтервалом. Так как математическое ожидание величины пропорционально , то число квадратов, необходимых на одном подинтервале, пропорционально . Всего имеется таких подиитервалов, и поэтому общее число квадратов пропорционально

(5)

получим:

1. **Статистическое самоподобие**
* **Теорема 2**.

Приращение реализации броуновского движения обладает свойством статистического самоподобия, то есть:

для любого . (Символ означает, что две случайные величины имеют одинаковое распределение и, в частности, одно и то же математическое ожидание и дисперсию.)

* **Доказательство**

Необходимо доказать, что

(6)

По свойству 2 броуновского движения, левая часть выражения (6) равна:

а правая часть равна:

Замена переменных в последнем интеграле смолит его к предыдущему.

1. **Броуновские поверхности**

Двумерный вариант броуновскою движения определяется по аналогии с одномерным случаем. Гауссовский процесс называется двумерным броуновским движением, если он обладает следующими свойствами:

 1. и функция почти всегда непрерывна.

 2. Свойство гауссовости приращений: случайная величина

имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием и дисперсией , где – положительная константа, то есть

Изображением двумерного броуновского движения является поверхность, такая, например, как на рис. 3. Как и в одномерном случае, двумерное броуновское движение почти наверное недифференцируемо. Фрактальная размерность двумерного броуновского движения равна .

Рисунок 3

Поверхность, изображенная на рис. 3, фактически является графиком функции , где – броуновская поверхность. Она напоминает горный массив, поднимающийся над поверхностью моря.

**Заключение**

Итак, в ходе курсовой работы мы разобрали основные понятия броуновского движения и с помощью графиков наглядно продемонстрировали вид броуновских движений.

**Список использованной литературы**

1. Ричард М. Кроновер «Фракталы и хаос в динамических системах» 2-е дополнительное издание 2006

2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — Москва: Институт компьютерных исследований, 2002