МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Тверской государственный университет

Математический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Катастрофы в теории гравитирующих конфигураций»

на тему «Критические точки распределения плотности быстровращающихся сверхплотных ньютоновских политроп»

Выполнил:

Козлов Александр Сергеевич

4 курс, группа 41

Проверил:

Айрян Эдик Арташович

Тверь 2017

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено аналитическое представление распределения плотности быстровращающихся сверхплотных ньютоновских политроп в виде многочленов по степеням параметров сплюснутости e и индекса политропы n, аппроксимирующих его с погрешностью 10-3. Построена схема определения критических точек в распределении плотности конфигурации. Для случая  n=1.36 получены значения параметров, характеризующих аналитическое представление плотности вблизи критических точек. Исследована динамика критических точек в зависимости от параметра e. Показано возникновение катастроф типа A2, A3. Доказано, что вблизи точки e=0.3503 в распределении плотности возникает область пузыря, имеющего форму эллиптического тора.

Уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи с плотностью г/ могут быть получены как из наблюдения свойств вращающихся нейтронных звезд (пульсаров), так и лабораторных экспериментов по столкновению встречных высокоэнергичных пучков тяжелых ионов.

Наиболее перспективными в этом аспекте являются наблюдения за эволюцией экстремально вращающихся миллисекундных пульсаров. Многие их свойства начинают сильно зависеть от вида уравнения состояния.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы. Уравнения состояния идеального ферми-газа, так и реалистические уравнения Бете-Джонсона и Рейда можно приблизить политропной соответствующего индекса.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае политропы относительная плотность ( плотность в центре) определяется интегральным уравнением (Ляпунова) с подвижной границей в :

, (1)

Где D область , в которой длины большой и малой полуосей сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; , угловая скорость вращения конфигурации; Gгравитационная постоянная; 2 , давление в центре конфигурации; nиндекс политропы.

Граница конфигурации находится из условия

В дальнейшем для упрощения обозначений положим и будем искать решение (1) в виде полинома наилучшего приближения в метрике в случае фигур вращения:

 (2)

В (2) значения индексов a и b берутся четными, а N возьмем равным шести.

Теоретическим основанием (2) является теорема Стоуна-Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на компакте функции нескольких переменных.

Используя разработанный комплекс символьно-численных программ в системе MAPLE, мы получили аналитическое выражение в виде многочленов по степеням е и n, аппроксимирующих с погрешностью порядка численные значения коэффициентов

Основная задача нашей работы это анализ структуры (2) в зависимости от управляющих параметров e и n чрезвычайно сложен, поэтому мы, качественно не упрощая задачу, будем рассматривать ее при фиксированном значении индекса политропы n=1,36. Данное значение близко к значению индекса политропы для идеального нерелятивисткого ферми-газа нейтронов и приводит к очень интересным эффектам в распределении . Управляющим параметром задачи остается только параметр сплюснутости e(.

Одним из простых и наглядных методов изучения функции (r,z,e) является метод изучения поверхностей постоянного уровня (ППУ), полученных при фиксированных значениях . Для фигур вращения эту задачу можно упростить. Рассмотрим сечение конфигурации полуплоскостьюугол азимута). Тогда ППУ при пересечении с полуплоскостью образует семейство линий постоянного уровня (ЛПУ). Они так же являются алгебраическими кривыми шестого порядка.

Рассмотрим в начале самый простой случай e=1, т.е. сферически-симметричный случай без вращения. ЛПУ с шагом 1/30 показаны на рис.1.



Как видно из рис.1, ЛПУ представляет собой окружности. Отметим, что в центральной части и в близи границы плотность убывает существенно медленнее, чем в срединной ее части.

При наличии вращении и картина усложняется. Зависимость от e при n=1,36 дает график рис.2.

В случае e=0,6 (



Из рис.3 видно, что расстояние между ЛПУ в области значений

существенно возросло. Это означает наличие в этой области экваториальной плоскости большой зоны с медленно меняющийся плотностью.

Картина ЛПУ существенно усложняется при . Поэтому далее целесообразно для изучения структуры использовать качественные методы анализа из математической теории катастроф. Согласно этой теории, центральное место в нашем случае занимает вопрос о поиске критических точек, их классификации и изучении динамики при изменении управляющего параметра . Эту программу несложно реализовать на компьютере в системе MAPLE, так как в рамках этой системы у нас уже есть аналитические представления коэффициентов .

# РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Критические точки для гладких функций находятся из уравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Поскольку у нас  — полином по координатам и , приближающий плотность конфигураций в , мы предлагаем для поиска критических точек и изучения поведения вблизи них использовать следующий подход, эквивалентный условию (3) для гладких функций, который легко реализуется в виде компьютерной программы. Вблизи критических точек представим и в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Подставляя (4) в (2), имеем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

Разность удобно обозначить как .Тогда (5) перепишется в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

Значения и находятся из уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

Подставляя их в (6) и сохраняя в нем значащие члены разложения по степеням и в окрестности критической точки , имеем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

В математической теории катастроф выражение получило название морсовской составляющей, а неморсовской составляющей. В результате

Функцию называют также ростком катастрофы, и она существенна только при . Эти точки получили название катастроф. В точках катастроф в нашем случае отличными от нуля будут коэффициенты или , или , или .

Если то и имеет место катастрофы .

Точно такой случай реализуется при и тип катастрофы . Но при , и тип катастрофы уже будет . В общем случае тип катастрофы определяется ростком .

Критические точки с называются морсовскими, с неморсовскими. Морсовские точки — это точки локального максимума , точки минимума и седовые точки . Их соответственно обозначим знаками .

Проведенные на компьютере расчеты показали, что постоянной критической морсовской точкой при всех значениях будет точка , т.е. в центре конфигурации. ЛПУ вблизи нее будут эллипсы с полуосями соответственно.

Значения и при соответственно равны , а при e=0,6 ) -3,5865, -7,4672.

Вторая критическая точка возникает при . В ней росток катастрофы . Уравнение ЛПУ вблизи этой критической точки имеет вид

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

Структура ЛПУ-конфигурации для данного случая изображена на рис.4.



При уменьшении от значения происходит процесс вытягивания из неморсовской критической точки двух морсовских  — седловой точки и точки максимума .Этот процесс изображен на диаграмме на рис.5.

Обе точки расположены в плоскости экватора.

Седловая точка с уменьшением двигается в сторону оси вращения, а точка максимума в сторону экватора. Для приведем систему ЛПУ на рис.6.

Когда достигает значения , возникают еще две неморсовские критические точки , с коэффициентами . Росток катастрофы равен Вблизи точек определяется уравнением

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

Соответствующие ЛПУ изображены на рис. 7.



При дальнейшем уменьшении е из каждой неморсовской точки вытягиваются две морсовские точки минимума и седловая . Этот процесс изображен на диаграмме на рис. 8.

Седловые точки движутся от плоскости экватора и к оси вращения. Точки минимума же сдвигаются от оси вращения и к экваториальной плоскости.

ЛПУ для е = 0,418 (ε = 0,03470) приводятся на рис. 9. Для е = 0,4159 (ε = 0,03465) и е = 0,41 (ε = 0,03449) на рис. 10 и 11 соответственно.

Из рис. 9-11 очевидным становится (с уменьшением е) процесс сближения седловой точки в плоскостях экватора и точек минимума. При е = 0,3992 (ε = 0,03414) происходит слияние этих морсовских точек в неморсовскую А3. Этот процесс изображен на рис. 12.

Тогда rk = 0,7271, zk = 0, λ1 = 3,3204, λ2 = 0, α = 0, росток катастрофы равен Z4, = 14,5289 и семейство ЛПУ вблизи этой точки определяется уравнением

Получились сильно вытянутые вдоль оси вращения выпуклые кривые. Семейство ЛПУ дано на рис. 13.

Далее с уменьшением е значение параметра λ2 становится положительным и неморсовская точка катастрофы А3 переходит в морсовскую точку локального минимума (диаграмма на рис. 14).

Эта точка минимума с дальнейшим уменьшением е сдвигается к оси вращения, а значение в этой точке быстро начинает уменьшаться. Значение = 0 достигается в точке е = 3503 (ε = 0,03176). Вокруг данной точки возникает область с чрезвычайно малой плотностью, а ЛПУ образуют эллипсы с полуосями . Отношение полуосей , равное 0,2010, говорит о том, что эти эллипсы сильно вытянуты вдоль оси вращения.

Дальнейшее уменьшение е приводит к тому, что формально в точке r = rk, z = 0 уже < 0, и эту точку мы обозначим .

Условие ≥ 0 начинает выполняться лишь вне некоторой малой окрестности точки е < 3503. Граница конфигурации вблизи нее будет определяться уравнением эллипса:

 + = 1 , (12)

а распределение плотности формулой

 h = λ1R2 + Z2 . (12a)

Производя обратные замены Z = z, R = r – rk, получаем уравнение эллиптического тора в цилиндрических координатах:

z2 = (13)

Зависимость параметров от вблизи точки представляется соотношениями

(14)

 .

С уменьшением фигура пузыря начинает существенно отличаться от эллиптического тора (рис.15). Это связано с уравнением роли кубических и четвертой степени членов по и в уравнении поверхности. С учетом этих членов уравнение поверхности пузыря вблизи точки будет иметь вид (15)

Поскольку область, внутри которой , напоминает кольцо, то мы предполагаем ее называть кольцеобразным пузырем.

В случае возникновения пузыря, его надо учитывать при решении уравнения (1). Но поскольку размеры пузыря можно сделать сколь угодно малым и вблизи его центра , то мы с точной нам степенью точности влиянием области пузыря на конфигурацию можем пренебречь.

Система ЛПУ в случае образования пузыря (он заштрихован) при дана на рис.16.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное нами изучении поведения структуры критических точек функции 𝜌̃ в зависимости от изменения параметра сплюснутости 𝑒 (быстроты вращения 𝜀) при фиксированном индексе политропы 𝑛 показало сложный характер перестройки этой стуктуры.

Критические точки рождаются, перемещаются, сливаются. Возникает сложная динамика этих точке, в результате которой образуется состояние пузыря.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михеев С.А., Цветков В.П. «Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице.»
2. Сисакян А.Н. «Методы квантовой теории и физика больших множественностей.»
3. Михеев С.А., Цветков В.П. «Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций выраженного ферми-газа.»
4. Коллатц Л., Крабс В. «Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения.»
5. Беспалько Е.В и др. «Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния.»
6. Арнольд В.,И. «Теория катастроф.»
7. Гилмор Р. «Прикладная теория катастроф.»