**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное

 учреждение высшего образования

**Тверской государственный университет**

(ФГБОУ ВО ТвГУ)

**Математический факультет**

**Кафедра общей математики и математической физики**

Специальность «**Математика и компьютерные науки**»

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

По дисциплине «Комплексный анализ»

Тема: «Римановы поверхности»

 Автор:

 **Афанасьев Евгений Алексеевич,**

 **3 курс, 31 группа**

 Научный руководитель:

 **Кандидат физико-**

 **математических наук, доцент,**

 **Чемарина Юлия Владимировна**

 Тверь 2016 г

**Римановы поверхности.**

Рассмотрим на плоскости (x,y) окружность x2+y2=1. Если мы захотим записать уравнение этой окружности в виде y=f(x), то нам придется использовать многозначную функцию f(x)=±(1-x2)0.5. Эту функцию мы сможем рассматривать как однозначную, если будем рассматривать ее не как функцию точки отрезка (-1,1), а как функцию точки кривой, которая состоит из этого отрезка, проходимого дважды: на одной половине кривой корню приписываются положительные значения, на другой – отрицательные.

Аналогичное рассуждение можно провести и для многозначных аналитических функций. Пусть нам дана какая-либо многозначная аналитическая функция w=f(z). Изобразим все ее значения точками в четырехмерном пространстве (z,w). Множество всех точек вида (z,f(z)) образует в этом пространстве некоторую двумерную поверхность. Эта поверхность в силу теоремы о единственности не имеет самопересечений по линиям, однако в изолированных точках различные «куски» этой поверхности могут склеиваться.

Множество всех точек вида (z,f(z)), где f(z) – все значения функции в точке z называется графиком аналитической функции f(z).

По аналогии с разобранным выше примером кривой на плоскости мы можем попытаться сделать нашу многозначную функцию однозначной, рассматривая ее не на плоскости, а на некотором множестве, состоящем из многократно проходимых листов плоскости.

Рассмотрим это подробнее. Пусть дана (многозначная) аналитическая функция f(z), определенная в области D комплексной плоскости. Условимся рассматривать области Dk, из которых в процессе аналитического продолжения строится область D, как отдельные листы, изготовленные в таком количестве экземпляров, сколько значений имеет функция в данной области D.

Рассмотрим в плоскости z некоторую цепочку областей D0,D1,…,Dn с общими участками границ γ01,γ12,…γn-1,n. Пусть области D0 и D1 имеют общие части, причем в одних из этих частей значения f0(z) и f1(z) совпадают, а в других различны. Возьмем листы, соответствующие D0 и D1 и склеим их по линии, соответствующей γ01. Расположим эти листы над D0+γ01+D1 так, чтобы каждый лист лежал над соответствующей областью, и склеим их части, расположенные над теми общими частями D0 и D1, в которых f0(z) и f1(z) совпадают; склеенные части будем рассматривать как один слой. Над теми же общими частями областей D0 и D1, в которых значения f0(z) и f1(z) различаются, мы расположим соответствующие части листов друг над другом, так что над такими частями будет лежать по два слоя. Условимся относить значение f0(z) к точке первого листа, расположенной над z, а значение f1(z) – к такой же точке второго листа; тогда функция будет однозначной на совокупности склеенных таким образом листов.

Точно такие же операции проделаем над листом, соответствующим D2 и т.д. При этом может случиться так, что надлежащая склейка листов невозможна (в трехмерном пространстве) без их пересечения; мы условимся такие пересечения не принимать во внимание ( где изображена окрестность точки разветвления третьего порядка, склеенная из трех колец 0<⏐z-z0⏐<R
с разрезами; мы не принимаем во внимание пересечения, возникающие при склейке колец D0 и D2). В результате получим кусок, вообще говоря, многолистной поверхности, расположенный над областью D0+γ01+D1+…+γn-1,n+Dn.

Если проделать описанные операции для всевозможных цепочек областей, определяющих аналитическую функцию f(z), то получим, вообще говоря, многолистную поверхность R, расположенную над областью D. Эту поверхность и называют римановой поверхностью функции f(z).

Любую аналитическую функцию можно рассматривать как однозначную на ее римановой поверхности. Для этого достаточно относить различные значения, принимаемые функцией в какой-либо точке z, к различным листам римановой поверхности, расположенным над этой точкой. Например, три значения корня  в точке z≠z0 из окрестности z0 мы условимся относить к трем точкам поверхности, на рис. лежащим над точкой z.

Если функция w=f(z) обратна к однозначной функции z=ϕ(w), то она, очевидно, реализует взаимно однозначное отображение своей римановой поверхности на полную плоскость w или ее часть. В общем же случае w=f(z) отображает одну риманову поверхность на другую.

Поверхность, образованную из отдельных областей определения ветвей многозначной аналитической функции, соединенных (склеенных) друг с другом так, чтобы одна ветвь непрерывно переходила в другую, и в совокупности составляющих всю область существования функции, будем называть римановой поверхностью этой функции, а отдельные области определения ее ветвей, из которых составлена риманова поверхность – ее листами.

 **Простейшие примеры римановых поверхностей.

Пример 1**. Риманова поверхность корня . В качестве областей Dk возьмем плоскости с вырезанной положительной полуосью: Dk характеризуется неравенствами 2kπ<argz<2(k+1)π (k=0,±1,±2,…).
В начальной области D0 возьмем ветвь f0(z), определяемую условием 0<argz<2π и будем продолжать ее в области D1,D2,…,Dn-1. В соответствии с этим заготовим n экземпляров листов, имеющих тот же вид, что и Dk и будем склеивать нижний берег разреза области D0 с верхним берегом разреза области D1, нижний берег разреза области D1 с верхним берегом разреза области D2 и т.д. Значения f0(z) и fn(z) на положительной полуоси (и во всей области Dn=D0) совпадают. Следовательно, мы должны склеить между собой (не учитывая пересечений, которые при этом возникают) оставшиеся свободными верхний берег разреза на листе D0 c нижним берегом разреза на Dn-1. Значения  в остальных областях Dk лишь повторяют выделенные значения f0,f1,…,fn-1, следовательно, построенная n-листная поверхность и является римановой поверхностью функции . Над точками z=0 и z=.она имеет алгебраические точки ветвления порядка n.

Пример 2. Риманова поверхность логарифма w=lnz. Области Dk те же, что и в предыдущем примере. В D0 выбирается ветвь w=ln|z|+iargz, где 0<argz<2πи эта ветвь неограниченно продолжается в области Dk для k=±1,±2,... Это соответствует тому, что бесчисленное множество экстремумов листов, имеющих тот же вид, что и Dk, соединенных между собой по следующему закону: нижний берег разреза каждого листа Dk склеивается с верхним берегом разреза листа Dk+1. Получившаяся риманова поверхность логарифма показана на рис. Над z=0 и z=. она имеет точки ветвления логарифмического типа.

 **Риманова поверхность логарифма.**

**Элементом в точке z0 называют функцию f(z), регулярную в некоторой окрестности этой точки.**
Пусть D – произвольная односвязная область, не содержащая точек 0 и ∝. Фиксируем точку z0∈D и значение lnz0 в этой точке. Аналитически продолжив элемент f(z) логарифма (f(z0)=lnz0) по всем путям, которые выходят из точки z0 и лежат в области D, получим однозначную в области D функцию f(z). Это следует из теоремы о монодромии и из того, что в односвязной области любые две кривые, имеющие общее начало и общий конец, гомотопны (т.е. могут быть непрерывно деформированы одна в другую, не выходя за пределы области).

Полученная однозначная аналитическая функция называется регулярной ветвью логарифма в области D. Выбрав в точке z0 другое значение логарифма, получим другую регулярную ветвь логарифма в этой области.

Выберем в качестве D плоскость с разрезом по лучу [0,+∝). Функция lnz в этой области распадается на бесконечное число однозначных ветвей. Эти ветви имеют вид: fk(z)=ln|z|+i(argz)0+2kπi, k=0,±1,±2,… где (argz)0 – однозначная ветвь аргумента, такая что 0<(argz)0<2π. Возьмем бесконечно много экземпляров области D. Обозначим их Dk, k=0,±1,±2,…и будем считать, что в области Dk задана регулярная функция fk(z).

Теперь склеим области Dk (листы) в одну поверхность. Если обозначить через lk разрез на месте Dk, то lk+ и lk- - соответствуют верхний и нижний берега разреза. Если z=x>0, то fk(x)=ln|x|+2kπi,          x∈ lk+ fk(x)=ln|x|+2(k+1)πi,   x∈ lk- т.к. (argx)0=2π, x∈lk±. Следовательно, поэтому будем склеивать нижний берег разреза lk- с верхним берегом разреза lk+1+, k=0, ±1, ±2,…, тогда функция lnz будет однозначна на полученной бесконечнолистной поверхности. Она называется римановой поверхностью логарифма. Эта поверхность односвязна.

**Замечание**. Можно иначе «разрезать» логарифм на регулярные ветви. Именно, в качестве D можно взять плоскость с разрезом по любой простой кривой γ, соединяющей точки 0 и . Выбор разреза диктуется конкретной задачей.

 **Риманова поверхность функции.**

Пусть D – плоскость с разрезом по лучу (-,0]. Тогда функция  распадается на однозначные ветви f1(z) и f2(z), такие что f1(1)=1, f2(z)≡-f1(z). Возьмем 2 экземпляра области D: D1 и D2 и будем считать, что функция fj определена в области Dj (j=1,2). Тогда при z∈Dj; fj(reiϕ)=r1/2ei/2(ϕ+(j-1)2π). f1,2(reiϕ)=±r1/2eiϕ/2, -π<ϕ<π. Пусть lj – разрез на листе Dj, а lj+ и lj- - соответственно верхний и нижний берега разреза, т.к. ϕ=±π на lj±, то F1(z)⏐z∈l1+=f2(z)⏐z∈l2-;     f1(z)⏐z∈l1-=f2(z)⏐l2+.

Поэтому для того, чтобы получить поверхность, на которой функция  однозначна, необходимо склеить верхний берег разреза l1+ с нижним берегом разреза l2- и, аналогично, склеить l1- с l2+ (крест-накрест). Получится риманова поверхность функции , имеющая самопересечение.

Аналогично строится риманова поверхность функции .Возьмем n экземпляров D0,…,Dn-1 области D. В области Dk рассмотрим регулярную функцию:
fk(z)=r1/ne(i/n)(ϕ+2kπ), -π<ϕ<π, тогда fk(z)⏐z∈lk+=fk+1(z)⏐z∈lk-. Склеим берег l0+ с берегом l1-, l1+ с l2- и т.д., и, наконец, ln-1+ с l0-; получим риманову поверхность функции . Риманова поверхность функции  односвязна.