МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Тверской государственный университет

Математический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Катастрофы в теории гравитирующих конфигураций»

на тему «Критические точки распределения плотности быстровращающихся сверхплотных ньютоновских политроп

для n=1.30»

Выполнил:

Афанасьев Евгений Алексеевич

4 курс, группа 41

Проверил:

Виницкий Сергей Ильич

Тверь 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………………...……..3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ………………………………………….4

РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК………………………….……….7

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………….10

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……………………………...…………….11

ПРИЛОЖЕНИЕ 1……………………………………………………..12

ПРИЛОЖЕНИЕ 2…………………..…………………………………13

ВВЕДЕНИЕ

В работе получено аналитическое представление распределения плотности быстровращающихся сверхплотных ньютоновских политроп в виде многочленов по степеням параметров сплюснутости e и индекса политропы n, аппроксимирующих его с погрешностью 10-3. Построена схема определения критических точек в распределении плотности конфигурации. Для случая  n=1.30 получены значения параметров, характеризующих аналитическое представление плотности вблизи критических точек. Исследована динамика критических точек в зависимости от параметра e. Показано возникновение катастроф типа A2, A3. Доказано, что вблизи точки e=0.3003 в распределении плотности возникает область пузыря, имеющего форму эллиптического тора.

Уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи с плотностью г/ могут быть получены как из наблюдения свойств вращающихся нейтронных звезд (пульсаров), так и лабораторных экспериментов по столкновению встречных высокоэнергичных пучков тяжелых ионов.

Наиболее перспективными в этом аспекте являются наблюдения за эволюцией экстремально вращающихся миллисекундных пульсаров. Многие их свойства начинают сильно зависеть от вида уравнения состояния.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы. Уравнения состояния идеального ферми-газа, так и реалистические уравнения Бете-Джонсона и Рейда можно приблизить политропной соответствующего индекса.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае политропы относительная плотность ( плотность в центре) определяется интегральным уравнением (Ляпунова) с подвижной границей в :

, (1)

Где D область , в которой длины большой и малой полуосей сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; , угловая скорость вращения конфигурации; Gгравитационная постоянная; 2 , давление в центре конфигурации; nиндекс политропы.

Граница конфигурации находится из условия

В дальнейшем для упрощения обозначений положим и будем искать решение (1) в виде полинома наилучшего приближения в метрике в случае фигур вращения:

 (2)

В (2) значения индексов a и b берутся четными, а N возьмем равным шести.

Теоретическим основанием (2) является теорема Стоуна-Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на компакте функции нескольких переменных.

Используя разработанный комплекс символьно-численных программ в системе MAPLE, мы получили аналитическое выражение в виде многочленов по степеням е и n, аппроксимирующих с погрешностью порядка численные значения коэффициентов

Основная задача нашей работы это анализ структуры (2) в зависимости от управляющих параметров e и n чрезвычайно сложен, поэтому мы, качественно не упрощая задачу, будем рассматривать ее при фиксированном значении индекса политропы n=1,30. Данное значение близко к значению индекса политропы для идеального нерелятивисткого ферми-газа нейтронов и приводит к очень интересным эффектам в распределении . Управляющим параметром задачи остается только параметр сплюснутости e(.

Одним из простых и наглядных методов изучения функции (r,z,e) является метод изучения поверхностей постоянного уровня (ППУ), полученных при фиксированных значениях . Для фигур вращения эту задачу можно упростить. Рассмотрим сечение конфигурации полуплоскостьюугол азимута). Тогда ППУ при пересечении с полуплоскостью образует семейство линий постоянного уровня (ЛПУ). Они так же являются алгебраическими кривыми шестого порядка.

Рассмотрим в начале самый простой случай e=1, т.е. сферически-симметричный случай без вращения. ЛПУ с шагом 1/30 показаны на рис.1.



Как видно из рис.1, ЛПУ представляет собой окружности. Отметим, что в центральной части и в близи границы плотность убывает существенно медленнее, чем в срединной ее части.

При наличии вращении и картина усложняется. Зависимость от e при n=1,30 дает график рис.2.

В случае e=0,6 (



Из рис.3 видно, что расстояние между ЛПУ в области значений

существенно возросло. Это означает наличие в этой области экваториальной плоскости большой зоны с медленно меняющийся плотностью.

Картина ЛПУ существенно усложняется при . Поэтому далее целесообразно для изучения структуры использовать качественные методы анализа из математической теории катастроф. Согласно этой теории, центральное место в нашем случае занимает вопрос о поиске критических точек, их классификации и изучении динамики при изменении управляющего параметра . Эту программу несложно реализовать на компьютере в системе MAPLE, так как в рамках этой системы у нас уже есть аналитические представления коэффициентов .

# РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Критические точки для гладких функций находятся из уравнения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3) |

Поскольку у нас  — полином по координатам и , приближающий плотность конфигураций в , мы предлагаем для поиска критических точек и изучения поведения вблизи них использовать следующий подход, эквивалентный условию (3) для гладких функций, который легко реализуется в виде компьютерной программы. Вблизи критических точек представим и в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Подставляя (4) в (2), имеем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |

Разность удобно обозначить как .Тогда (5) перепишется в виде

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

Значения и находятся из уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

Подставляя их в (6) и сохраняя в нем значащие члены разложения по степеням и в окрестности критической точки , имеем

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

В математической теории катастроф выражение получило название морсовской составляющей, а неморсовской составляющей. В результате

Функцию называют также ростком катастрофы, и она существенна только при . Эти точки получили название катастроф. В точках катастроф в нашем случае отличными от нуля будут коэффициенты или , или , или .

Если то и имеет место катастрофы .

Точно такой случай реализуется при и тип катастрофы . Но при , и тип катастрофы уже будет . В общем случае тип катастрофы определяется ростком .

Критические точки с называются морсовскими, с неморсовскими. Морсовские точки — это точки локального максимума , точки минимума и седовые точки . Их соответственно обозначим знаками .

Проведенные на компьютере расчеты показали, что постоянной критической морсовской точкой при всех значениях будет точка , т.е. в центре конфигурации. ЛПУ вблизи нее будут эллипсы с полуосями соответственно.

Значения и при соответственно равны , а при e=0,6 ) -3,0865, -7,4672.

Вторая критическая точка возникает при . В ней росток катастрофы .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное нами изучении поведения структуры критических точек функции 𝜌̃ в зависимости от изменения параметра сплюснутости 𝑒 (быстроты вращения 𝜀) при фиксированном индексе политропы 𝑛 показало сложный характер перестройки этой структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михеев С.А., Цветков В.П. «Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице.»
2. Сисакян А.Н. «Методы квантовой теории и физика больших множественностей.»
3. Михеев С.А., Цветков В.П. «Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций выраженного ферми-газа.»
4. Коллатц Л., Крабс В. «Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения.»
5. Беспалько Е.В и др. «Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния.»
6. Арнольд В.,И. «Теория катастроф.»
7. Гилмор Р. «Прикладная теория катастроф.»

ПРИЛОЖЕНИЕ 1





ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ

Функции

j:=2:

rho:=1:

\_rho:=1:

NULL;

for i from 0 by 2 to 6 do

while (j+i)<=6 do

rho:=rho+pho[i,j]\*r^i\*z^j:

\_rho:=\_rho+\_pho[i,j]\*r^i\*z^j:

j:=j+2:

end do;

j:=0:

end do:

rho:=rho:

\_rho:=\_rho:

rho:=subs(z=z/e, rho):

\_rho:=subs(z=z/e, rho):

Замена r:=r[k]+Rcosa+Zsina, z:=z[k]+Zcosa-Rsina для функции rho e[0,6;1]

rho:=subs(r=r[k]+(R\*t)\*cos(a)+(Z\*t)\*sin(a), rho):

rho:=subs(z=z[k]+(Z\*t)\*cos(a)-(R\*t)\*sin(a), rho):

rho:=expand(rho):

rho:=simplify(expand(rho),{t^5=0}):

rho:=rho:

Замена r:=r[k]+Rcosa+Zsina, z:=z[k]+Zcosa-Rsina для функции \_rho e[0,4;0,6]

\_rho:=subs(r=r[k]+(R\*t)\*cos(a)+(Z\*t)\*sin(a), \_rho):

\_rho:=subs(z=z[k]+(Z\*t)\*cos(a)-(R\*t)\*sin(a), \_rho):

\_rho:=expand(\_rho):

\_rho:=simplify(expand(\_rho),{t^5=0}):

\_rho:=\_rho:

t:=1:

Функции rho коэфф при R, Z, RZ

UruR:=subs(Z=0, coeff(rho,R,1))=0:

UruZ:=subs(R=0, coeff(rho,Z,1))=0:

UruRZ:=coeff(coeff(rho,R),Z)=0:

Функции \_rho коэфф при R, Z, RZ

\_UruR:=subs(Z=0, coeff(\_rho,R,1))=0:

\_UruZ:=subs(R=0, coeff(\_rho, Z, 1))=0:

\_UruRZ:=coeff(coeff(\_rho,R),Z)=0:

При конкретном e

e:= 0.4530;

solve({evalf(subs(a=0, UruR)),evalf(subs(a=0, UruZ))}, {r[k],z[k]}):

A:=fsolve({evalf(subs(a=0, UruR)),evalf(subs(a=0, UruZ))}, {r[k],z[k]});

A;

solve(evalf(subs(A,UruRZ)));