**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное

 учреждение высшего образования

**Тверской государственный университет**

(ФГБОУ ВО ТвГУ)

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**по дисциплине «Введение в теорию фракталов»**

на тему: «Метрические пространства»

Автор:

**Морева Анастасия Андреевна,**

**3 курс, 31 группа**

Тверь 2017г

**Метрические пространства**

До сих пор, говоря о расстоянии, мы всегда подразумевали евклидово расстояние. Так, расстояние между векторами **х** и **у** в **Rn** мы определили как длину вектора IIх - уII2, а именно:

$$IIх - уII₂ =\sqrt{( x₁ - y₁)^{2}+…+(x\_{n}-y\_{n})^{2}}$$

Но расстояния можно вычислять и по-другому, используя различные меры длины. Например, рассмотрим упрощенную карту города в виде прямоугольной сетки улиц с двусторонним движением. Тогда адекватной мерой длины может служить кратчайшее расстояние, которое нужно преодолеть, чтобы добраться от одного перекрестка до другого. Иногда такое расстояние называют манхэттенским.

Вместо того чтобы перечислять всевозможные меры длины, большинство из которых нам не понадобится, мы сейчас рассмотрим требования (аксиомы), которым должна удовлетворять произвольная мера длины. Все последующие теоремы о расстояниях будут доказаны в рамках этих аксиом, то есть в наиболее общем виде. В математике принято вместо выражения «мера длины» использовать термин метрика.

**Метрикой** на множестве X называется вещественная функция d(x, у), определенная на произведении X × X и удовлетворяющая следующим аксиомам:

а) d(x, у) > 0 для всех х, у ϵ X;

б) d(x, у) = 0 влечет х = у;

в) d(x,y) = d(y,x);

г) d(x, z) ≤ d(x,y) + d(y,z) для всех х, у, z ϵ X (неравенство треугольника).

Метрическим пространством называется пара (X, d). Доказательство того, что евклидово расстояние IIх - уII2  удовлетворяет аксиомам (а), (б) и (в), тривиально.

Докажем неравенство треугольника.

Рассмотрим следующее выражение:

IIx-zII22= (x-z , x-z) = (x-y + y-z , x-y + y-z) =

= (x-y , x-y) + (x-y , y-z) + (у - z, x - у) + (у - z, у - z) =

=IIx-zII22 + 2(x-y , y-z) + IIx-zII22.

Применяя неравенство Коши-Шварца ко второму слагаемому в последнем выражении, получим:

I2(x-y , y-z)I ≤ 2IIx-yII2IIy-zII2.

Таким образом, имеем:

IIx-zII22 ≤ IIx-yII22 + 2IIx-yII2IIy-zII2  + IIy-zII22 ≤ (IIx-yII2 + IIy-zII2)2.

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем неравенство треугольника.

Таким образом, евклидово расстояние является метрикой, которую мы в дальнейшем будем называть евклидовой метрикой.

Рассмотрим один важный класс метрик в пространстве **Rn**, a именно класс р-метрик. Р-метрика является обобщением евклидовой метрики и совпадает с ней при р = 2. Для 1 < р < ∞ , р-метрика определяется следующим образом: $IIх - уIIp=ᵖ\sqrt{Iх₁ – у₁Iᵖ +…+Ix\_{n}-y\_{n}Iᵖ }$

Для р =∞:

IIх - yII = max{lx1 – y1l +… + lхn – ynl}.

Заметим, что в определении метрики мы не стали требовать, чтобы элементы **х** и **у** принадлежали пространству **Rn**. Это дает нам возможность определить множество X, также как и его элементы **х**, **у** и т. д., многими разными способами. Наша задача состоит в том, чтобы указать при каких условиях фрактальное построение сходится. Для этого нужно уметь измерять расстояние между компактными множествами, то есть необходимо определить соответствующую метрику.

Введем несколько понятий. Открытым шаром B(x0, r) в метрическом пространстве X называется совокупность точек x ∈ X, удовлетворяющих условию ρ(x, x0) < r.

 Замкнутым шаром B[x0, r] называется совокупность точек x ∈ X, удовлетворяющих условию ρ(x, x0) 6 r.

Точка x0 называется центром, а число r > 0 — радиусом шара.

Открытый шар радиуса ε с центром в точке x0 называется ε-окрестностью точки x0 и обозначается как Oε(x0).

Приведем классификацию точек множества. Точка x ∈ X называется точкой прикосновения множества M ⊂ X, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Точка x ∈ X называется предельной точкой множества M ⊂ X, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Точка x ∈ M называется внутренней точкой множества M, если существует окрестность Oε(x), целиком лежащая в M.

Точка x ∈ M называется изолированной точкой множество M, если в достаточно малой ее окрестности Oε(x) нет точек из M, отличных от x.

 Имеет место следующее утверждение: всякая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной.

**Теория множеств в метрических пространствах.**

Нам предстоит сделать большой шаг вперед и распространить теоретико- множественные определения, подразумевавшие евклидову метрику, на произвольные метрики. Открытый шар в метрическом пространстве (X, d) определяется следующим образом:

Br(x) = { yϵX : d(x,y) < r}.

С учетом этого равенства, мы можем оставить без изменений данные выше определения следующих понятий:

открытое множество, внутренность множества, замкнутое множество, граница множества, диаметр множества, совершенное множество, ограниченное множество, связное множество, сходимость, компонента множества, замыкание множества, вполне разрывное множество.

Если d(x,y) — метрика на множестве X, а f — взаимно однозначная вещественная функция, то

ρ(x,y) = If(x) - f(y)I

также есть метрика на X. Аксиомы (а) и (в), очевидно, выполнены.

ρ (х:У) удовлетворяет аксиоме (б), так как f — взаимно однозначная функция. Аксиома (г) запишется в виде неравенства:

|f(х) – f(z) | ≤ |f(х) – f(y)| + |f(y) - f(z)|,

то есть классического неравенства треугольника для вещественных чисел. Пример метрики, заданной таким образом:

ρ (х,у) = |х3-у3|, x,y ϵ R.

Говорят, что две метрики, d(x, у) и ρ (х, у), определенные на множестве X, эквивалентны, если можно указать такие К1 > 0 и K2> О, что:

K1d(x, у) ≤ ρ(х, у) ≤ K2d(x, у), х, у ϵ X.

Можно показать, что любые две р-метрики в пространстве Rn, где 1 < р < ∞, эквивалентны.

С другой стороны, метрики d(x, у) = |х - у|и ρ (х, у) = |х3 - у3| на множестве R не эквивалентны.

По-видимому, основным следствием эквивалентности метрик для теории фракталов является тот факт, что фрактальная размерность сохраняется при замене метрики на эквивалентную. Более того, если множество открыто (замкнуто) в одной метрике, то оно открыто (замкнуто) и в любой эквивалентной метрике. Далее, если множество ограничено в одной метрике, то оно ограничено и в любой эквивалентной метрике. То же самое относится и к совершенным, связным и вполне разрывным множествам.

**Сходимость**

Пусть d(x,y) — метрика на множестве X. Последовательность точек {хn}n=1 метрического пространства X сходится к пределу х ϵ X в метрике d, если последовательность чисел {d(xn, x)}n=1 сходится к нулю в обычном смысле, то есть если:

lim d(xn,x) = 0.

Здесь эквивалентность метрик выражается в следующем. Если метрики

d(x, у) и ρ (х, у) эквивалентны, то хn → х в d-метрике тогда и только тогда, когда хn → х в р-метрике, так как:

K1d(xn,x) ≤ ρ (хn,х) ≤ K2d(xn,x).

Если d(xn,x) → 0, то р(хn,х) → 0 и наоборот.

**Непрерывность**

В курсе математического анализа функция f, определенная на X, называется непрерывной в точке Хо € X, если:

lim f(х) = f(х0).

В евклидовом пространстве это означает, что: для каждого ε > 0 существует такое число δ > 0, что при IIх — ХоII2 < δ, хϵХ, выполняется неравенство

IIf(х) — f(х0) II2< ε.

Это определение легко обобщается на функции, чья область определения есть метрическое пространство (X,d1), а область значений — другое метрическое пространство (Y,d2): для каждого ε > 0 существует такое число

 δ > 0, что при d1(x0,x) < δ, хϵX, выполняется неравенство d2(f(х0),f(х)) < ε.

С использованием последовательностей, непрерывность можно определить так. Функция f непрерывна в точке x0 ϵ (X,d\), если:

lim f(xn) = f(x0)

в d2-метрике для любой последовательности {xn}n=1, сходящейся к хо в d1-метрике.

Говорят, что функция f непрерывна на множестве А, если она непрерывна в каждой точке А. Свойства исходного множества А, которые при непрерывном отображении f сохраняются без изменений у множества f(A) = {f(х) : х ϵ А}, называются инвариантами непрерывности. К таким свойствам относятся компактность и связность.

Метрические характеристики, в частности, фрактальная размерность, инвариантами непрерывности не являются. В теории фракталов часто используют более сильные ограничения, чем непрерывность, например, требуют выполнения условия Липшица.

**Литература:**

1. Бичегкуев М.С. Метрические пространства Москва 2005
2. Яковлев Г.Н. Функциональные пространства Московский физико – технический институт 2000г
3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов Москва 2013г