Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Тверской государственный университет»

Математический факультет

Направление «Математика и компьютерные науки»

Кафедра общей математики и математической физики

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине

"Катастрофы в теории гравитирующих конфигураций"

на тему: "Критические точки распределения

плотности быстровращающихся сверхплотных ньютоновских политроп

для n = 1.48"

Выполнила: Любавская

Светлана Васильевна, группа М-41

Научный руководитель: Винницкий

Сергей Ильич,

профессор физико-

математических наук

Тверь 2018

**Содержание**

ВВЕДЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .3

2. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .6

ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .7

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .8

1

**ВВЕДЕНИЕ**

Уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи с плотностью

ρ > 2, 9·1014 г/cм3 могут быть получены как из наблюдения свойств вращающихся нейтронных звезд (пульсаров), та и лабораторных экспериментов по столкновению встречных высокоэнергичных пучков тяжелых ионов.

Наиболее перспективными в этом аспекте являются наблюдения за эволюцией экстремально вращающихся миллисекундных пульсаров. Многие их свойства начинают сильно зависеть от вида уравнений состояния [1].

Существенным вкладом в решение данной задачи является поиск на ускорителях новых состояний ядерной материи, возникающих в процессе соударения тяжелых ионов высоких энергий. Эта задача решается на экспериментальных установках LHC (CERN, Швейцария), RHIC (BNL, США), а также планируется для изучения на будущих ускорительных комплексах NICA (ОИЯИ, Дубна) и FAIR (GSI, Германия) [2, 3]. В ОИЯИ осуществляется строительство нового тяжелоионного коллайдера NICA с энергиями от 4 до 11 ГэВ/нуклон в системе центра масс. При таких энергиях образуется состояние горячей и плотной ядерной материи как в форме смешанной фазы из кварков и глюонов, так и из адронов. Кроме этого, на NICA будет возможен поиск сигналов перехода адронной материи в кваркглюоннную плазму [2].

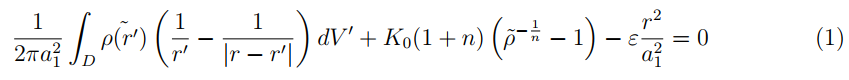
В планируемых на NICA экспериментах может быть получено состояние вещества с плотностью, аналогичной плотности нейтронных звезд порядка 5·1014 −1015 г/см3 . Возникает уникальная возможность получения информации об уравнениях состояния смешанной фазы кваркглюонной плазмы, использование ее в расчетах свойств быстровращающихся нейтронных звезд, таких как масса, радиусы, момент инерции, скорость изменения их периода вращения. Сравнение расчетов с астрофизическими данными позволит получить ограничения на механизмы взаимодействия кварков и глюонов в указанном выше диапазоне плотностей.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы. Как показано в работе [4], с высокой точностью как уравнения состояния идеального ферми-газа, так и реалистические уравнения Бете-Джонсона и Рейда можно приблизить политропой соответствующего индекса.

2

1. **ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

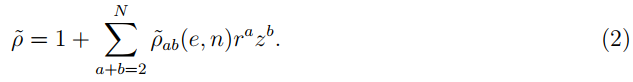
В случае политропы относительная плотность ρ˜ = ρ/ρ0 (ρ0 - плотность в центре) определяется интегральным уравнением (Ляпунова) с подвижной границей в R3 [1]:

****

где D — область R3 , в которой ρ˜ ≥ 0, , x1 = x/a1, x2 = y/a1, x3 = z/a3, a1, a3 — длины большой и малой полуосей сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; e = a3/a1,  = ω 2/(4πGρ0), ω — угловая скорость вращения конфигурации; n — индекс политропы.

Граница конфигурации находится из условия ρ(r) = 0

В дальнейшем для упрощения обозначений положим x3 = z и будем искать решение (1) в виде полинома наилучшего приближения в метрике L2 в случае фигур вращения:



В (2) значения индексов a и b берутся четными, а N возьмем равным шести.

Теоретическим основанием (2) является теорема Стоуна-Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на компакте функции нескольких переменных [5].

Используя разработанный в [6] комплекс символьночисленных программ в системе MAPLE, мы получили аналитическое выражение в виде многочленов по степеням e и n, аппроксимирующих с погрешностью порядка 10−6 численные значения коэффициентов

ρ˜ab(e, n).

Основная задача работы — это анализ структуры (2) в зависимости от управляющих параметров e и n. Общий случай произвольных значений e и n чрезвычайно сложен, поэтому стоит рассматривать ее при фиксированном значении индекса политропы n = 1, 32. Данное значение близко к значению индекса политропы для идеального нерелятивистского ферми-газа нейтронов и приводит к очень интересным эффектам в распределении ρ˜. Управляющим параметром задачи остается только параметр сплюснутости e(ε).

Одним из простых и наглядных методов изучения функции ρ˜(r, z, e) является метод изучения поверхностей постоянного уровня (ППУ), полученных при фиксированных значениях ρ˜. Для фигур вращения эту задачу можно упростить. Рассмотрим сечение конфигурации полуплоскостью φ = const (φ — угол азимута). Тогда ППУ при пересечении с полуплоскостью образуют семейство линий постоянного уровня (ЛПУ). Они также являются алгебраическими кривыми шестого порядка.

Картина ЛПУ существенно усложняется при e ≤ 0, 5105 (ε ≥ 0, 03502). Поэтому далее целесообразно для изучения структуры ρ˜ использовать качественные методы анализа

3

из математической теории катастроф [7, 8]. Согласно этой теории, центральное место в нашем случае занимает вопрос о поиске критических точек, их классификации и изучении динамики при изменении управляющего параметра e(ε). Эту программу несложно реализовать на компьютере в системе MAPLE, так как в рамках этой системы у нас уже есть аналитические представления коэффициентов ρ˜ab(e).

4

1. **РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК**

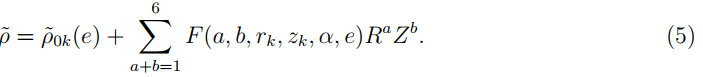
Критические точки rk, zk для гладких функций f(r, z) находятся из уравнения



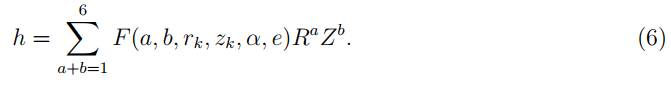
Поскольку у нас ρ˜ — полином по координатам r и z, приближающий плотность конфигурации в L2, для поиска критических точек и изучения поведения ρ˜ вблизи них рекомендуется использовать следующий подход, эквивалентный условию (3) для гладких функций, который легко реализуется в виде компьютерной программы. Вблизи критических точек rk, zk представим r и z в виде



Подставляя (4) в (2), имеем



Разность ρ˜− ρ˜0k удобно обозначить как h. Тогда (5) перепишется в виде



Значения rk, zk и α находятся из уравнений



Подставляя их в (6) и сохраняя в нем значащие члены разложения по степеням R и Z в окрестности критической точки rk, zk, имеем



В математический теории катастроф выражение hM = λ1R2+λ2Z2 получило название морсовской составляющей, а hNM = ˜aR3 + ˜b(e)Z3 + ˜c(e)Z4 — неморсовской составляющей. В результате h = hM + hNM.

Функцию hNM называют также ростком катастрофы, и она существенна только при

λ1 · λ2 = 0. Эти точки получили название катастроф. В точках в нашем случае отличными от нуля будут коэффициенты или a˜, или ˜b, или c˜.

Если λ1 = 0, a0(˜b = ˜c = 0), то hNM ∼ R3 и имеет место тип катастрофы A2. Точно такой случай реализуется при λ2 = 0, ˜b  0 (˜a = ˜c = 0), hNM ∼ Z 3 и тип катастрофы A2. Но при

λ2 = 0, c˜ 0 (˜a = ˜b = 0), hNM ∼ Z 4 и тип катастрофы уже будет A3. В общем случае тип катастрофы An определяется ростком x n+1 .

Критические точки с λ1 · λ2  0 называются морсовскими, с λ1 · λ2 = 0 — неморсовскими. Морсовские точки — это точки локального максимума (λ1 < 0, λ2 < 0), точки минимума

(λ1 > 0, λ2 > 0) и седловые точки λ1 · λ2 < 0). Их соответственно обозначим знаками

Проведенные на компьютере расчеты показали, что постоянной критической морсов- ской точкой ⊕ при всех значениях e() будет точка rk = zk = 0, т.е. в центре конфигурации.

Значения λ! и λ2 при e = 1 (ε = 0) соответственно равны −3.00221, −3.00221, и при e = 0, 6 (ε = 0, 03225) мы получаем те же коэффициенты.

Вторая критическая точка возникает при e = 0.52805. В ней rk = −0.83307, zk = 0, α = 0, λ1 = 0, λ2 = −0.32041, росток катастрофы A2 = ˜aR3 (˜a = 7.28497).

Графики каждого из вариантов (Рис.1 и Рис.2) находятся в приложении на странице 7.

5

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Проведенное здесь изучение поведения структуры критических точек функции ρ˜ в зависимости от изменения параметра сплюснутости e при фиксированном индексе политропы n показало сложный характер перестройки этой структуры. Критические точки рождаются, перемещаются, сливаются. Возникает сложная динамика этих точек.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

[1] Михеев С.А., Цветков В.П. Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице.

[2] Сикасян А.Н. Методы квантовой теории и физика больших множественностей.

[3] Searching for a QCD Mixed Phase at the Nuclotron-Based Ion Collider Facility (NICA White Paper).

[4] Михеев С.А., Цвеиков В.П. Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций вырожденного ферми-газа.

[5] Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения.

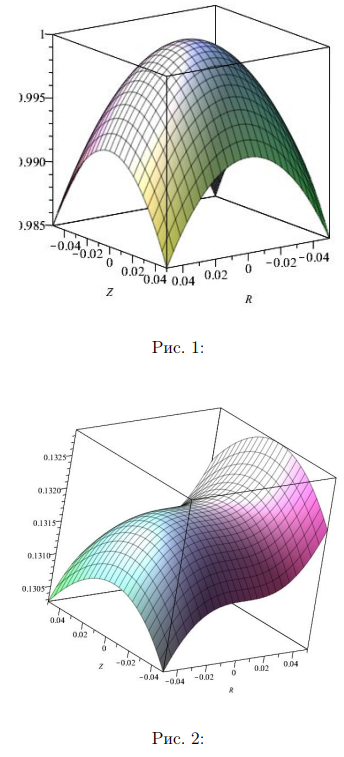
[6] Беспалько и др. Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния.

[7] Арнольд В.И. Теория катастроф.

[8] Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.

6

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

****

7

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

Листинг программы

**функции**

**> j:=2:**

**rho:=1:**

**\_rho:=1:**

**for i from 0 by 2 to 6 do**

**while (j+i)<=6 do**

**rho:=rho+pho[i,j]\*r^i\*z^j:**

**\_rho:=\_rho+\_pho[i,j]\*r^i\*z^j:**

**j:=j+2:**

**end do;**

**j:=0:**

**end do:**

**rho:=rho:**

**\_rho:=\_rho:**

**rho:=subs(z=z/e, rho):**

**\_rho:=subs(z=z/e, rho):**

**> **

**замена r:=r[k]+Rcosa+Zsina, z:=z[k]+Zcosa-Rsina для функции ро e[0,6;1]**

**> rho:=subs(r=r[k]+(R\*t)\*cos(a)+(Z\*t)\*sin(a), rho):**

**rho:=subs(z=z[k]+(Z\*t)\*cos(a)-(R\*t)\*sin(a), rho):**

**rho:=expand(rho):**

**rho:=simplify(expand(rho),{t^5=0}):**

**rho:=rho:**

**> **

**замена r:=r[k]+Rcosa+Zsina, z:=z[k]+Zcosa-Rsina для функции \_ро e[0,4;0,6]**

**> \_rho:=subs(r=r[k]+(R\*t)\*cos(a)+(Z\*t)\*sin(a), \_rho):**

**\_rho:=subs(z=z[k]+(Z\*t)\*cos(a)-(R\*t)\*sin(a), \_rho):**

**\_rho:=expand(\_rho):**

**\_rho:=simplify(expand(\_rho),{t^5=0}):**

**\_rho:=\_rho:**

**> **

8

**> t:=1:**

**> **

**функции ро коэф при R, Z, RZ**

**> UruR:=subs(Z=0, coeff(rho,R,1))=0:**

**UruZ:=subs(R=0, coeff(rho,Z,1))=0:**

**UruRZ:=coeff(coeff(rho,R),Z)=0:**

**> **

**функции \_ро коэф при R, Z, RZ**

**> \_UruR:=subs(Z=0, coeff(\_rho,R,1))=0:**

**\_UruZ:=subs(R=0, coeff(\_rho, Z, 1))=0:**

**\_UruRZ:=coeff(coeff(\_rho,R),Z)=0:**

**> **

**для конкретного e**

**> e:=0.5280448899999:**

**solve({evalf(subs(a=0, UruR)),evalf(subs(a=0, UruZ))}, {r[k],z[k]});**

**A:=fsolve({evalf(subs(a=0, UruR)),evalf(subs(a=0, UruZ))}, {r[k],z[k]});**

**A;**

**solve(evalf(subs(A,UruRZ)));**

9