УДК 004.42, 514.82

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Светлана Васильевна Любавская
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: isakurai@bk.ru
Станислав Владимирович Соков
Тверской государственный университет, Тверь
E-Mail: sokovstanislav@gmail.com

Ключевые слова: компьютерная алгебра, уравнения Эйнштейна, скалярное поле.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения систем компьютерной алгебры для решения задач гравитации. На примере программного пакета Maple проиллюстрирована возможность упрощения громоздких выкладок и получения точных решений в рамках общей теории относительности.

Решая задачи теории гравитации, студент, преподаватель, исследователь зачастую сталкивается со сложностями в осуществлении громоздких вычислений компонентов тензорных полей: тензоров кривизны, коэффициентов связности, тензора Эйнштейна.

Существенно облегчить эти вычисления могут системы компьютерной алгебры со встроенными специальными пакетами. Одним из примеров служит система компьютерной алгебры Maple, являющаяся продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Основу пакета составляет специальное ядро – программа символьных преобразований. Кроме того, имеется несколько тысяч специальных функций, хранящихся в подгружаемых к ядру пакетах и библиотеках. Maple умеет не только вычислять, но и обладает богатыми возможностями графического представления математических объектов и процессов.

Система Maple содержит ряд пакетов, помогающих в решении задач гравитации:

1) **Tensor –** содержит команды для оперирования с тензорами и их использования в общей теории относительности как в естественном базисе, так и с движущимся репером.

Этот пакет использует свой тип представления данных, называемый tensor_type, чтобы представлять объекты как с ковариантными, так и контравариантными индексами. Говоря более конкретно, tensor_type – это таблица с двумя входами: поле компонент `compts` для запоминания компонент объекта и поле характеристик индексов `index_char` для описания ковариантных/контравариантных признаков индексов объекта. Компоненты должны запоминаться в виде массива с размерностью эквивалентной рангу объекта и со всеми диапазонами индексов, начиная с 1 и кончая размерностью пространства (разрешены только диапазоны с одинаковой размерностью) [3].

2) **DEtools** – пакет дополнительных средств для дифференциальных уравнений. Этот пакет содержит команды построения двух- и трехмерных графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными (команды DEplot, DEplot3d, и PDEplot); команды замены переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях (команда Dchangevar) и системы координат в уравнениях с частными производными (PDEchangecoord); команды понижения порядка дифференциальных уравнений и некоторые другие команды [2], [3].

3) **Plots** – команды построения специальных видов графиков функций, включая построение линий уровня, отображение неявно заданных функций, включение текстовых надписей в график, построение графиков в различных системах координат [3].

Приведем пример использования системы компьютерной алгебры Maple для решения конкретной задачи. Мы составим программу, позволяющую найти точные безмассовые решения для гравитирующего сферически-симметричного скалярного поля.

Сначала определим общий вид метрики. Для статических сферически-симметричных конфигураций полей метрику можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2\gamma(\xi)}dt^2 - e^{2\alpha(\xi)}d\xi^2 - e^{2\beta(\xi)}(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Для удобства вычислений используем гармонические координаты, в которых $\alpha = 2\beta + \gamma$.

Лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$L = -\frac{R}{2x} + \frac{1}{8\pi}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha},$$

где $\varphi = \varphi(\xi)$ – скалярное поле.

Из лагранжиана следуют уравнения Эйнштейна и уравнение скалярного поля:

$$G_\nu^\mu = xT_\nu^\mu, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) = 0. \tag{2}$$

Компоненты тензора энергии-импульса вычисляются по формуле

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{4\pi}\left(\varphi_{,\nu}\varphi^{,\mu} - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right).$$

Решение уравнения (2) легко найти аналитически

$$\varphi(\xi) = C\xi + \varphi_0; \qquad C, \varphi_0 = const.$$

Для составления и решения уравнений Эйнштейна необходимо провести достаточно громоздкие вычисления, которые мы существенно сократим, используя пакет tensor.

Приведем листинг программы, позволяющей получить уравнения Эйнштейна.

```
> restart :
> with(tensor) :
> coord := [t, ξ, θ, φ];
                         coord := [t, ξ, θ, φ]
> g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4) :
>
  g_compts[1, 1] := exp(2·γ(ξ)) :
  g_compts[2, 2] := -exp(2·α(ξ)) :
  g_compts[3, 3] := -exp(2·β(ξ)) :
  g_compts[4, 4] := -exp(2·β(ξ))·sin(θ)^2 :
> g := create([-1, -1], eval(g_compts));
> α := ξ→2·β(ξ) + γ(ξ) :
> ϕ := ξ→C·ξ + ϕ0 :
> ginv := invert(g, 'detg') :
> D1g := d1metric(g, coord) : D2g := d2metric(D1g, coord) :
> Cf1 := Christoffel1(D1g) :
> RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1) :
> RICCI := Ricci(ginv, RMN) :
> Cf2 := Christoffel2(ginv, Cf1) :
> RS := Ricciscalar(ginv, RICCI) :
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS) :
> T_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4) :
>
```

$$T\_compts_{1,1} := -\frac{g\_compts_{1,1}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$

$$T\_compts_{2,2} := diff(\phi(\xi),\xi)^2 :$$

$$T\_compts_{3,3} := -\frac{g\_compts_{3,3}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$

$$T\_compts_{4,4} := -\frac{g\_compts_{4,4}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$

```
> T := create([-1, -1], eval(T_compts)) :
> UR := lin_com(Estn, T) :
> URAVN := get_compts(UR) :
> simplify(URAVN[1, 1] = 0, power);
  simplify(URAVN[2, 2] = 0, power);
  simplify(URAVN[3, 3] = 0, power);
```

$$e^{-6\beta(\xi)}\left(-2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)e^{2\beta(\xi)}\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 e^{2\beta(\xi)} - e^{4\beta(\xi)+2\gamma(\xi)} + 2\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\beta(\xi)\right)e^{2\beta(\xi)} + C^2 e^{2\beta(\xi)}\right) = 0$$

$$\left(-2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)e^{2\beta(\xi)}\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 e^{2\beta(\xi)} + e^{4\beta(\xi)+2\gamma(\xi)} + C^2 e^{2\beta(\xi)}\right)e^{-2\beta(\xi)} = 0$$

$$-e^{-2\beta(\xi)-2\gamma(\xi)}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\beta(\xi) - 2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) + \frac{d^2}{d\xi^2}\gamma(\xi) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 + C^2\right) = 0$$

Далее находим общее решение полученной системы уравнений в виде

$$\gamma = \pm h\xi + \gamma_0, \;\; \beta(\xi) = -\gamma(\xi) - \ln(k^{-1} sh(k\xi)), \;\; \alpha(\xi) = 2\beta(\xi) + \gamma(\xi),$$

где h, γ_0 - константы интегрирования, $k = \sqrt{h^2 + C^2}$.

Это семейство решений можно получить как аналитически, так и с использованием команд для решения дифференциальных уравнений.

Поученное семейство полностью исчерпывает все сферически-симметричные статические конфигурации безмассового скалярного поля и было получено в книге [7].

Рассмотрение нестатических конфигураций приводит к ещё более громоздким вычислениям (см., например, [5], [6]), проводить которые без использования систем компьютерной алгебры практически невозможно. Более того, все реальные решения, описывающие астрофизические объекты, могут быть получены, как правило, только численно, что также предполагает использование символьных и численных методов, реализуемых в системах компьютерной алгебры.

Таким образом, изучение систем компьютерной алгебры, в том числе системы Maple, в рамках дисциплин специализации бакалавриата и магистратуры может существенно помочь студенту в его научно-исследовательской деятельности, направленной на математическое моделирование объектов и явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аладьев В.З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба; Гродненский гос. ун-т им. Янки Купалы. - Гродно: ГрГУ, 2011.
2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple [Электронный ресурс]/ Егоров А. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2016.
3. Иванов А.О., Булычева С.В. Электронный курс. Прикладной математический пакет MAPLE. http://detc.usu.ru/assets/amath0011/index.htm
4. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011.
5. Салогуб Е.А., Столярова Г.Н., Чемарина Ю.В. Нестационарная модель сферическисимметричного топологического геона // Синергетика в общественных и естественных науках. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи: в 3 ч./Ответственный редактор: Лапина Г. П. Тверь: Изд. ТГУ, 2015. С. 110-113.
6. Чемарина Ю.В. Нестационарные конфигурации гравитирующего скалярного поля // Восьмые Курдюмовские чтения "Синергетика в естественных науках": материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. Тверь, 2012. С. 79-82.
7. Шикин Г.Н. Основы теории солитонов в общей теории относительности. - М.: Издательство «УРСС», 1995.