МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Тверской государственный университет

Математический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»

на тему «Гармонические функции»

Выполнила:

 Ильина Кристина Дмитриевна

3 курс, группа 31

Проверила:

Чемарина Юлия Владимировна

Тверь 2016

**Гармонические функции.**

Гармонической в области D функцией называется действительная функция u(x,y) двух действительных переменных, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая дифференциальному уравнению





* символ дифференциального оператора.

Это уравнение обычно называют уравнением Лапласа. Заметим сразу, что в силу линейности уравнения Лапласа любая линейная комбинация

гармонических функций uk(x,y) с действительными постоянными коэффициентами k снова является гармонической функцией.

**Свойства гармонических функций.**

Теорема 1 . Действительная и мнимая части произвольной

функции f(z)=u(x,y) + iv(x,y),однозначной и аналитической в области D, являются в этой области гармоническими функциями.

Доказательство непосредственно вытекает из условий Коши-Римана



(1)

.

,

В самом деле, так как аналитические функции обладают производными всех порядков, то уравнения (1) можно дифференцировать по x и y. Дифференцируя первое из них по x, а второе по y и пользуясь теоремой о равенстве смешанных производных, находим:



,

откуда

.

Для функции v(x,y)доказательство аналогично.

Две гармонические в области D функции u(x,y) и v(x,y), связанные условиями Коши – Римана, называются сопряженными.

Теорема 2. Для всякой функции u(x,y), гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию v(x,y).

В самом деле, рассмотрим интеграл



,

где z0=x0 +iy0 - фиксированная, а z=x+iy - переменная точка области D. В силу уравнения Лапласа

,

 этот интеграл не зависит от пути интегрирования и является функцией только точки z; мы и обозначаем эту функцию v0(x,y). Имеем, пользуясь свойствами криволинейных интегралов,

( мы можем брать интеграл от z до z+h по горизонтальному отрезку, на котором ; аналогично, . Следовательно, v0(x,y) и является искомой функцией, сопряженной с функцией u(x,y). Так как функция определяется своими частными производными с точностью до постоянного слагаемого, то совокупность всех гармонических функций, сопряженных с u(x,y), дает формула

(2)

,

где С – произвольная (действительная) постоянная.

Заметим, что в многосвязной области D интеграл (2)



L

определяет, вообще говоря, многозначную функцию. Он может принимать различные значения вдоль двух путей L и , соединяющих точки z и z0 , если эти пути нельзя деформировать друг в друга, оставаясь в области D (т.е. если внутри области, ограниченной L и имеются точки не принадлежащие к D). Можно утверждать, что в многосвязной области общая формула для значений функции v(x,y) определяемой интегралом (2), имеет вид:

(3)

,

L0

где Nk - произвольные целые числа и Gk - интегралы вдоль замкнутых контуров , каждый из которых содержит внутри себя одну связную часть границы D:

.

(4)

Постоянные Гk называются периодами интеграла (2), или циклическими постоянными.

Если в некоторой области D’, лежащей в D, можно выделить однозначную и непрерывную ветвь функции v(x,y) , определяемой формулой (3), то эта ветвь, очевидно, является гармонической функцией, сопряженной с u(x,y). Поэтому функцию v(x,y) считают многозначной гармонической функцией. Заметим, что частные производные этой функции однозначны:

; это вытекает из формулы (3).

Теорема 3(о среднем). Если функция u(z) непрерывна в замкнутом круге радиуса r с центром в точке z и гармонична внутри этого круга, то

.

Теорема 4. Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.

Теорему достаточно доказать для случая максимума, ибо точка минимума гармонической функции является точкой максимума функции - ,также гармонической. Предполагая противное, предположим, что гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке области.

В окрестности точки построим однозначную аналитическую функцию такую, что . Функция аналитична и непостоянна, а ее модуль , по нашему предположению, достигает максимума во внутренней точке области . это противоречит принципу максимума. Теорема доказана.

Теорема 5. Если гармоническая во всей открытой плоскости функция ограничена хотя бы сверху или снизу, то она постоянна.

В самом деле, пусть ограничена сверху: Построим аналитическую во всей открытой плоскости функцию такую, что . По условию теоремы все значения функции лежат в полуплоскости , следовательно, постоянна, а значит, постоянна и .

**Оглавление**

Введение

Определение гармонической функции

Свойства гармонических функций

Заключение