СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………..……3

РАЗМЕРНОСТЬ…………………………………………...…...….4

РАЗМЕРНОСТЬ МИНКОВСКОГО……………………………...6

ПРИМЕРЫ……………………………………………………...….7

СВОЙСТВА………………………………………………………..7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…………………………………...……9

ВВЕДЕНИЕ

Традиционная геометрия и топология далеко не полно описывают природные формы. Природа демонстрирует совершенно иной уровень сложности форм, отличный от прямых линий, эллипсов и других известных форм. Естественные формы зачастую оказываются неправильными, сильно фрагментированными и имеют фрактальную структуру. Исторически получилось так, что многие математики откладывали в сторону трудные формы, которые портили красоту их выкладок. В результате созданные ими идеализированные объекты весьма редко встречаются в природе в чистом виде. В природе нет прямых линий, идеальных окружностей, плоскостей и тд.. Всевозможные возмущения, которыми пренебрегают, постоянно вносят свой вклад и портят иллюзию простоты. К примеру, если взять кромку деревянной линейки, то она традиционно описывается с помощью отрезка прямой линии. Но современные данные говорят о том, что эта кромка далеко не идеально ровная, - в мелком масштабе существуют различные впадины и выступы. Погружаясь дальше можно обнаружить древесные волокна, которые состоят из еще более мелких волокон и пор. В более мелком масштабе все это состоит из молекул и атомов, которые постоянно вибрируют и меняются местами. Несмотря на эти неровности, математическая идеализация кромки линейки с помощью отрезка является наиболее подходящей. Но такие прямые объекты - большая редкость в природе. Что делать с такими формами, которые принимают облака, клубы дыма, рельеф гор, русла рек, морские побережья, молнии, пути броуновского движения, диффузионные фронты, галактические скопления, волны в океане, перколяционные кластеры, синергетические структуры и тд и тп? В этих объектах почти нет никаких классических гладких участков.

3

Традиционная геометрия уходит в бесконечную рекурсию при попытке описать. Подходы к их описанию и количественным оценкам появились достаточно недавно. Отцом фрактальной геометрии является Бенуа Мандельброт. Его фундаментальный труд был впервые опубликован в 1977 году.

РАЗМЕРНОСТЬ

Традиционно с размерностью связывают количество независимых параметров, необходимых что бы задать положение точки в пространстве. Положение точки области плоскости, ограниченной квадратом можно задать двумя измерениями, и тогда ее размерность будет равна двум. А можно исхитриться, и представить себе эту область в виде ломаной с очень сильно прижатыми друг к другу звеньями, сложенными наподобие столярного метра, например кривой Пеано. Тогда, для задания положения точки хватит и одного измерения, и размерность будет равна единице.

Одной из идей, выросших из открытия фрактальной геометрии, была идея нецелых значений для количества изменений в пространстве. Мы знаем, что Евклидова геометрия изучает фигуры с размерностью 1, 2, 3 (длина, ширина, высота). Фигуры с размерностью 1- это отрезок, с размерностью 2- фигура на плоскости (например, квадрат, трапеция, треугольник), 3- геометрические тела (например, куб, шар, пирамида и т.д.)

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о самом фрактале.

4

Если смотреть с математической точки зрения, то размерность определяется следующим образом.

Для одномерных объектов - увеличение в 2 раза линейных размеров приводит к увеличению размеров (в данном случае длины) в 2 раза, т.е. в 21.

Для двухмерных объектов увеличение в 2 раза линейных размеров приводит к увеличению размера (площади) в 4 раза, т.е. в 22. Приведем пример. Дан круг радиуса r, тогда S= π r2.

Если увеличить в 2 раза радиус, то: S1 = π(2r2 ); S1= 4πr2 .

Для трехмерных объектов увеличение в 2 раза линейных размеров приводит к увеличению объема в 8 раз, т.е. 23.

Если мы возьмем куб, то V=а3, V'=(2а)3=8а; V'/V= 8.

Однако природа не всегда подчиняется этим законам. Попробуем рассмотреть размерность фрактальных объектов на простом примере.

Представим себе, что муха хочет сесть на клубок шерсти. Когда она смотрит на него издалека, то видит только точку, размерность которой 0. Подлетая ближе, она видит сначала круг, его размерность 2, а затем шар – размерность 3. Когда муха сядет на клубок, она шара уже не увидит, а рассмотрит ворсинки, нитки, пустоты, т.е. объект с дробной размерностью.

Размерность объекта (показатель степени) показывает, по какому закону растет его внутренняя область. Аналогичным образом с ростом размера возрастает «объем фрактала». Ученые пришли к выводу, что фрактал - это множество с дробной размерностью.

5

РАЗМЕРНОСТЬ МИНКОВСКОГО

Размерность Минковского или грубая размерность ограниченного множества в [метрическом пространстве](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) равна

,

{\displaystyle \lim \limits \_{\varepsilon \to 0}{\frac {\ln(N\_{\varepsilon })}{-\ln(\varepsilon )}}}

где {\displaystyle N\_{\varepsilon }}— минимальное число множеств [диаметра](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B0%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80) {\displaystyle \varepsilon }, которыми можно покрыть наше множество. Если [предел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB) не существует, то можно рассматривать [верхний](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB) и [нижний предел](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B8%D0%B6%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB) и говорить соответственно о верхней и нижней размерности Минковского.

Близким к размерности Минковского понятием является [размерность Хаусдорфа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%A5%D0%B0%D1%83%D1%81%D0%B4%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B0). Во многих случаях эти размерности совпадают, хотя существуют множества, для которых они различны.

6

## ПРИМЕРЫ

## размерность конечного множества равна нулю, так как для него {\displaystyle \rho (n)}  не превосходит количества элементов в нём.

* размерность отрезка равна 1, так как необходимо {\displaystyle \lceil a/\epsilon \rceil } отрезков длины {\displaystyle \epsilon }, чтобы покрыть отрезок длины {\displaystyle a}. Таким образом,
* {\displaystyle \lim \limits \_{\epsilon \to 0}{\frac {\ln(N\_{\epsilon })}{-\ln(\epsilon )}}=\lim \limits \_{\epsilon \to 0}{\frac {\ln a-\ln \epsilon }{-\ln \epsilon }}=1}размерность квадрата равна 2, так как число квадратиков с диагональю {\displaystyle 1/n}, необходимых, чтобы покрыть квадрат со стороной {\displaystyle a}, ведет себя примерно как  {\displaystyle a^{2}n^{2}}.
* размерность [фрактального множества](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB) может быть дробным числом. Так, размерность [кривой Коха](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D0%B2%D0%B0%D1%8F_%D0%9A%D0%BE%D1%85%D0%B0) равна {\displaystyle \ln 4/\ln 3}.

Более подробно

* размерность Минковского множества {\displaystyle \{0,1,{\frac {1}{2}},{\frac {1}{3}},{\frac {1}{4}},\dots \}} равна 1/2.

СВОЙСТВА

1. Размерность Минковского конечного объединения множеств равна максимуму из их размерностей. В отличие от [размерности Хаусдорфа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%A5%D0%B0%D1%83%D1%81%D0%B4%D0%BE%D1%80%D1%84%D0%B0), это неверно для [счётного](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%87%D1%91%D1%82%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) объединения. Например, множество рациональных чисел между 0 и 1 имеет размерность Минковского 1, хотя является счётным объединением одноэлементных множеств (размерность каждого из которых равна 0). Пример [замкнутого](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BC%D0%BA%D0%BD%D1%83%D1%82%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) счётного множества с ненулевой размерностью Минковского приведён выше.

7

1. Нижняя размерность Минковского любого множества больше либо равна его размерности Хаусдорфа.
2. Размерность Минковского любого множества равна размерности Минковского его замыкания. Поэтому имеет смысл говорить лишь о размерностях Минковского замкнутых множеств.

8

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Тверской государственный университет

Математический факультет

КУРСОВАЯ РАБОТА

по дисциплине «Введение в теорию фракталов»

на тему «Размерность Минковского»

Выполнила:

Ильина Кристина Дмитриевна

3 курс, группа 31

Проверил:

Цветков Виктор Павлович

Тверь 2017

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. «Введение в теорию размерности».
2. Кроновер Р. М. «Фракталы и хаос в динамических системах».

9