

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФГБОУ ВО «Тверской Государственный Университет»
Математический факультет
Кафедра общей математики и физики

Курсовая работа

по дисциплине «Введение в теорию фракталов»

Направление подготовки: «Математика и компьютерные науки»

Тема: «Спирали, деревья, звезды»

Выполнил:

студентка 31 группы

Шитова Анастасия Вячеславовна

Научный руководитель:

Цветков В.П

Содержание

1. Введение.....	3
2. Спирали.....	4
2.1. Раскручивающаяся спираль.....	5
2.2. Спираль Архимеда.....	6
2.3. Спираль роста (логарифмическая спираль).....	7
3. Деревья.....	8
3.1. Дерево Пифагора.....	8
3.2. Склонившееся (спиральное) дерево Пифагора.....	10
4. Звезды.....	14
5. Список литературы.....	16

Введение

Фигуры и формы, о которых пойдет речь, заинтересовали еще древних греков. Пифагор доказал свою знаменитую теорему, построив фигур, в которой на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В наш век эта фигура Пифагора выросла в «дерево». Внимание Архимеда привлекли спирали: он даже написал о них трактат. Один из видов спиралей носит его имя. Спирали являются строительными блоками живого мира. Ядро клетки состоит из двойной спиральной структуры – ДНК, содержащей в себе генетический код формирующегося организма. Иногда и сами организмы имеют спиральную структуру, например, улитки.

В неживой природе примером спиральной структуры может служить спиральная галактика.

Спирали

Можно выделить три типа плоских спиралей:

- 1) раскручивающаяся спираль;
- 2) спираль Архимеда;
- 3) спираль роста.

Раскручивающаяся спираль

Когда мы разматываем нить с катушки, держа ее все время натянутой, то конец нити описывает спираль.

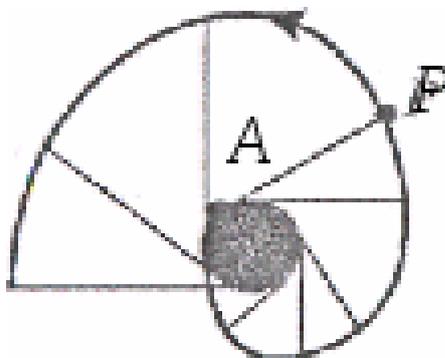


Рис.1.Раскручивающаяся спираль

Декартовы координаты точки P на спирали находятся по формулам:

$$x = a(\cos \varphi + \sigma \sin \varphi)$$

$$y = a(\sin \varphi - \sigma \cos \varphi)$$

где (a, φ) - полярные координаты точки A на катушке, (x, y) – координаты точки P (см. рис.1.).

Спираль Архимеда

В полярных координатах уравнение спирали Архимеда имеет вид:

$$r = a\varphi,$$

где $a > 0$ – постоянное число, определяющее расстояние между соседними витками.

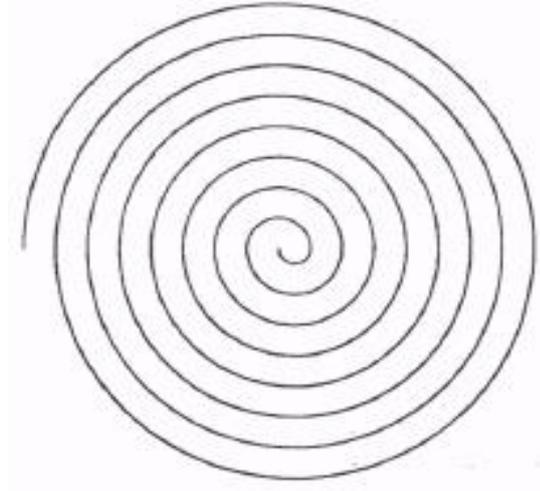


Рис.2. Спираль Архимеда

Спираль роста (логарифмическая спираль)

В полярных координатах спираль роста имеет вид:

$$\ln r = a\varphi$$

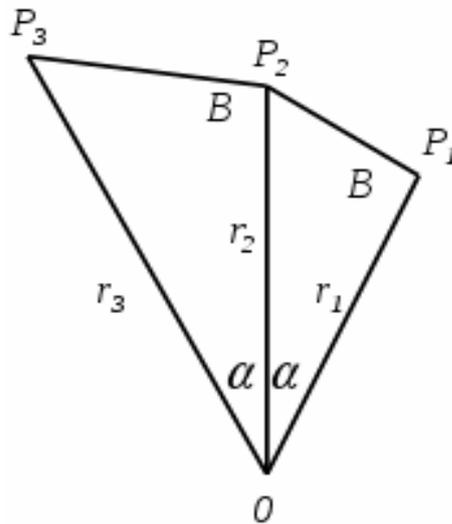


Рис.3. Три последовательные точки логарифмической спирали

Для логарифмических спиралей справедливо соотношение:

$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1}, \text{ или } \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1}, \text{ или } r_2^2 = r_1 r_3$$

Следовательно, r_2 является средним геометрическим r_1 и r_3 . Иначе говоря, полярные радиусы r_1, r_2, r_3, \dots последовательных точек логарифмической спирали P_1, P_2, P_3, \dots при увеличении полярных углов на постоянную величину « a » образуют геометрическую последовательность.

Уравнение логарифмической спирали можно записать в виде:

$$r = \exp(a\varphi)$$

Поэтому при $a > 0$ спираль раскручивающаяся, при $a < 0$ – скручивающаяся, при $a = 0$ – окружность. Более общая форма для логарифмической спирали имеет вид:

$$r = r_0 \exp(a\varphi),$$

где r_0 – некоторая постоянная.

Деревья

Дерево Пифагора

Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман (1891–1961) во время второй мировой войны, используя для этого обычную чертеж-ную линейку.

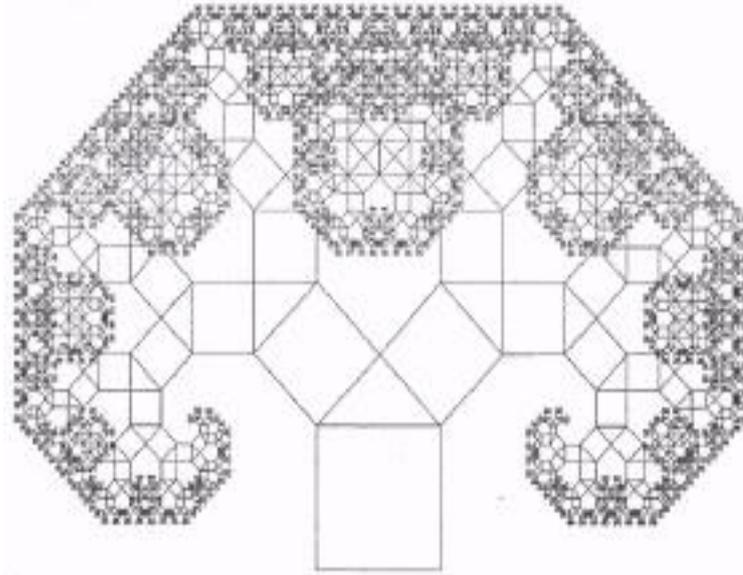


Рис.4. Дерево Пифагора

Пример Пифагорова дерева дан на рис.4 ($p=12$). Если мы пронумеруем квадраты, как на рис.5, то обнаружим, что квадрат с индексом «держит на себе» равнобедренный треугольник, от которого произрастают два более мелких квадрата. Квадраты слева имеют индекс $2n$, справа – $(2n+1)$. Вместе прямоугольный треугольник, два квадрата на его катетах и квадрат на гипотенузе дают геометрическое представление теоремы Пифагора. Если площадь первоначального квадрата равна единице, то общая площадь квадратов 2 и 3 также будет единица. То же самое получим для каждого следующего уровня. Тогда квадраты с номерами 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15 имеют общую площадь ту же, что и основной квадрат.

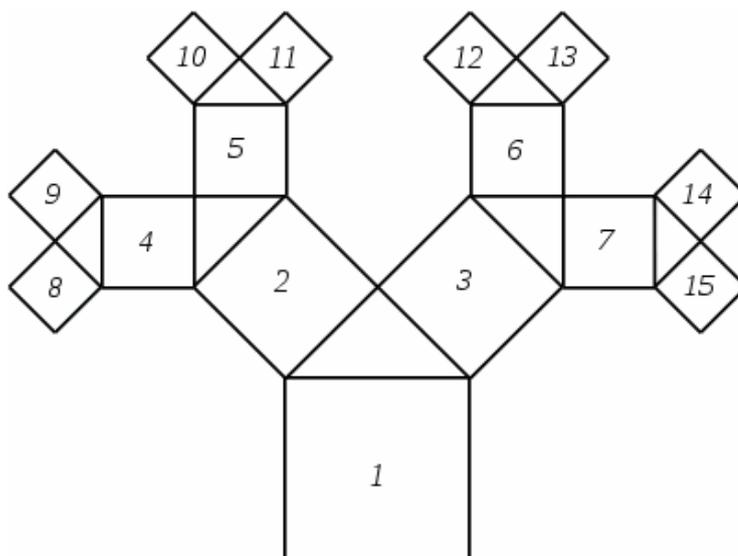


Рис.5. Первые стадии построения дерева Пифагора

Позицию квадрата, например, с номером 13, можем получить, используя двоичное представление $13=1\boxed{101}$. Читая цифры слева направо и пренебрегая самой левой позицией, получаем: 1 (вправо), 0 (влево), 1 (вправо). Итак, построение пифагорова дерева связано с двоичной системой счисления. Этот факт удобно использовать при его построении.

Склонившееся (спиральное) дерево Пифагора

Как обобщение стандартного дерева Пифагора, Босман предложил строить склонившееся дерево Пифагора. Схема построения такого дерева показана на рис.6. Фигура образуется добавлением на каждом шаге справа квадрата.

Завиток фигуры – это логарифмическая (ломаная) спираль, которая определяется преобразованием подобия R .

Преобразование подобия R – это поворот на угол α , комбинируемый с уменьшением масштаба в $\cos \alpha$ раз. Можно рассматривать преобразование подобия L , действующее слева: поворот на угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$ в комбинации с уменьшением масштаба в $\sin \alpha$ раз. Тогда получим дерево, которое показано на рис.7, где $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30°).

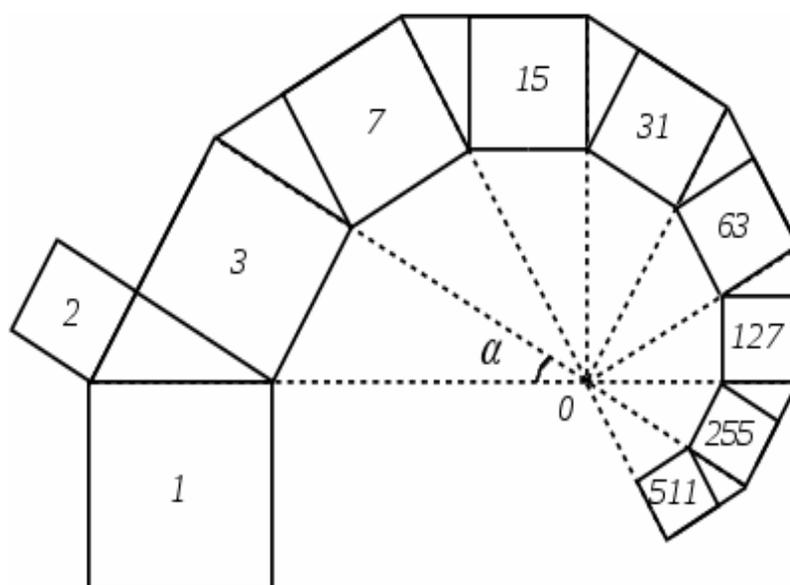


Рис.6. Логарифмическая спираль в склонившемся дереве Пифагора

Можно упростить дерево Пифагора, отбросив квадраты и рисуя только отрезки, которые соединяют «центры» треугольников. Сами треугольники не рисуются. В результате получим обнаженное дерево (первые стадии построения показаны на рис.8(а), а 10-я стадия – на рис.8(б)).

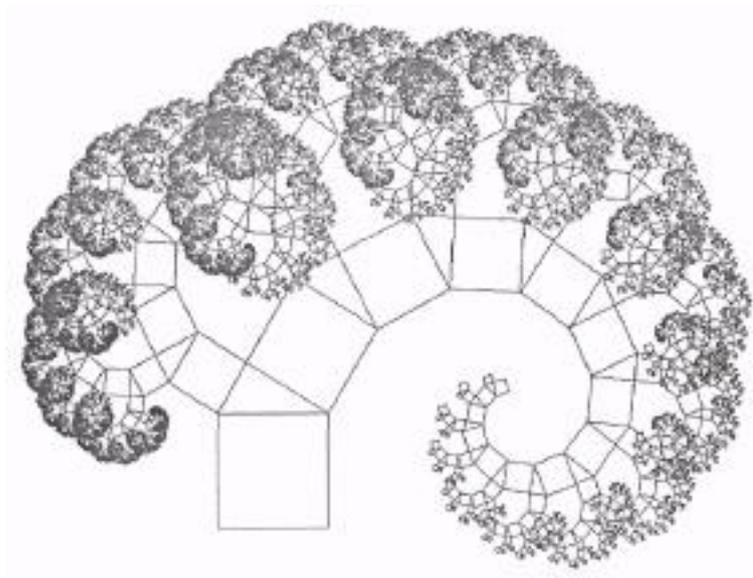


Рис.7. Склонившееся дерево Пифагора ($p=14$)

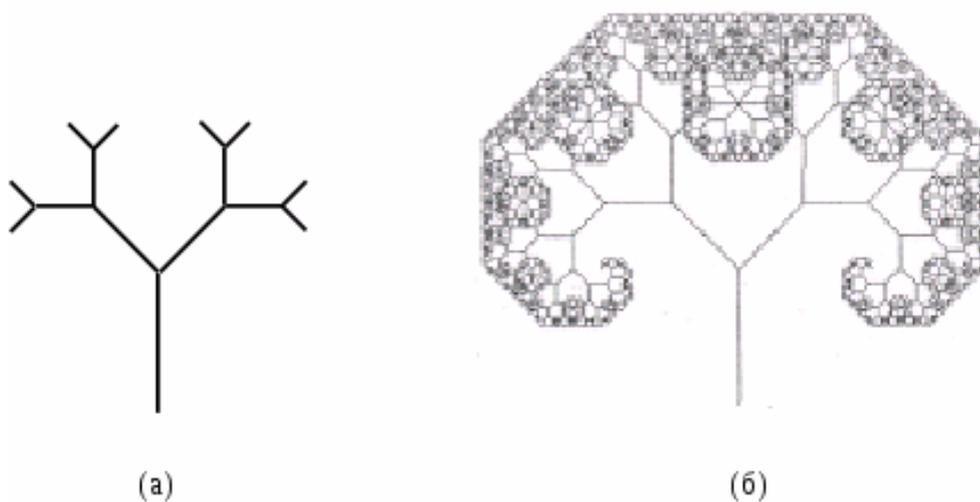


Рис.8. Обнаженное дерево Пифагора

В книге Мандельброта есть и другие варианты дерева Пифагора.

Одна из версий, основанная на стволе, показанном на рис.9, приведена на рис.10 ($p=11$).

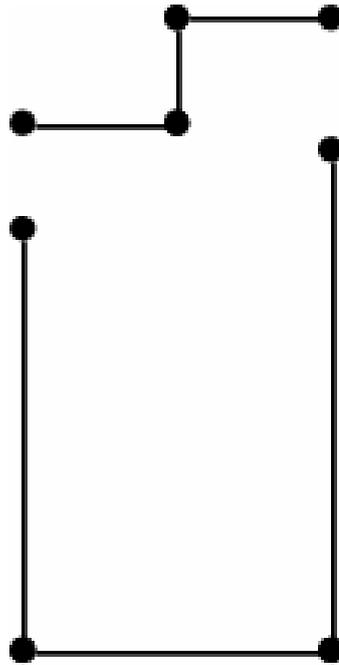


Рис.9. Ствол дерева Мандельброта

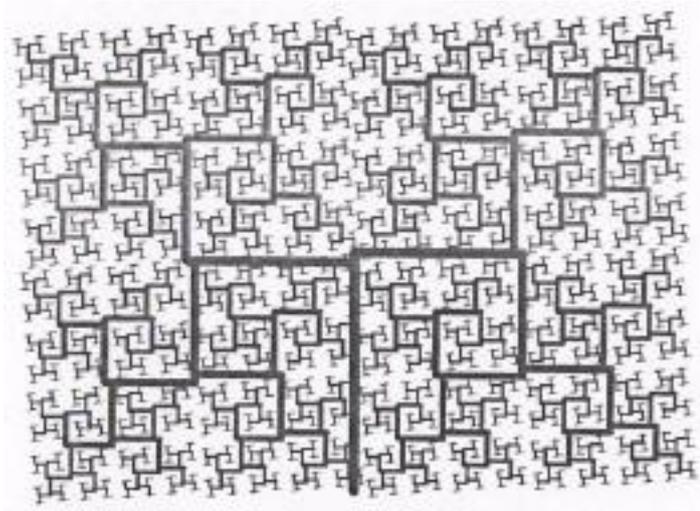


Рис.10. Дерево Мандельброта

Мандельброт построил и реалистичное фрактальное дерево (рис.12), основанное на модели, показанной на рис.11.

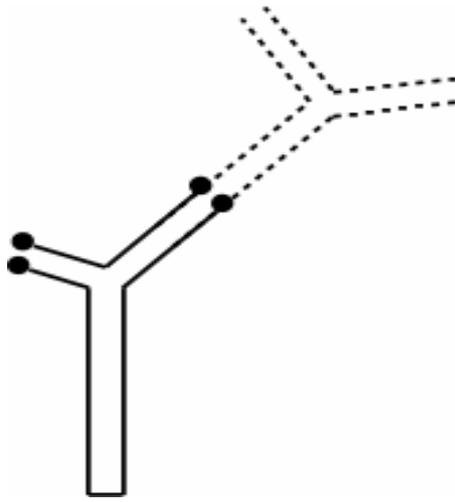


Рис.11. Модель реалистичного дерева

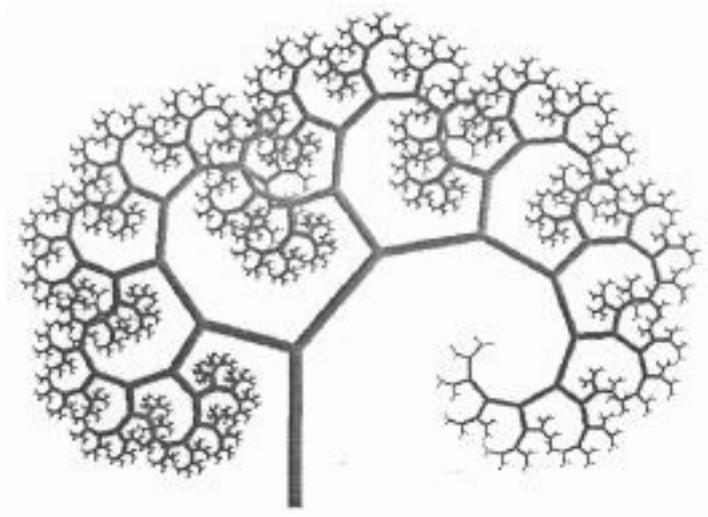


Рис.12. Реалистичное дерево ($p=11$)

Звезды

На рис.13 показан звездный фрактал. Он состоит из правильной пятиконечной звезды с гирляндой из 5 меньших образцов. Каждая из этих 5 более мелких звезд несет на своих четырех свободных концах еще более мелкие звезды. Теоретически этот процесс можно продолжать бесконечно. В результате получим звездный фрактал, обладающий самоподобием. На рис.13 показано 5 шагов (1280 отрезков). Этот звездный фрактал строится как замкнутая ломаная линия, последовательные отрезки всегда пересекаются под одним и тем же углом. Фрагмент с $\alpha = \frac{4\pi}{5}$ (144°) изображен на рис.14. Предположим, что отрезки пронумерованы от 0 до $n=1279$. Если первый отрезок с индексом $n=0$ имеет направление $\varphi = 0$, то направление произвольного отрезка с индексом n будет $n\alpha$. При построении такого фрактала мы должны иметь правило, по которому определяется длина n -го отрезка, если мы знаем длину $(n-1)$ -го отрезка. Для случая, изображенного на рис.13, имеем 5 различных длин: $1, r, r^2, r^3, r^4$, где r – показатель уменьшения (на рис.13 он равен 0.35).

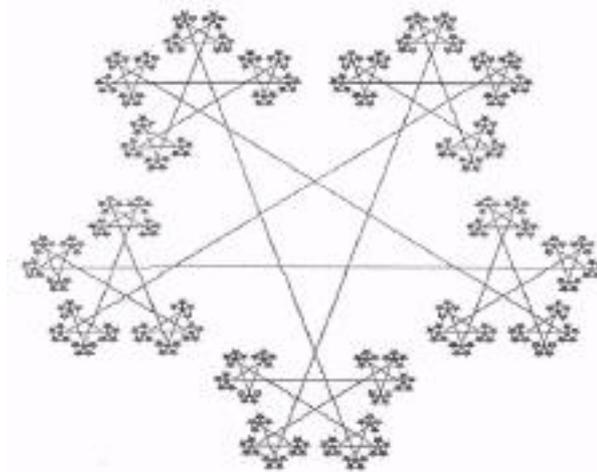


Рис.13. Звездный фрактал

Правило, на котором основано построение рис.13, следующее:

$n = 1,2,3,5,6,7,9,10,11,13\dots$	длина r^4
$n = 4,8,12,20,24,28,36,40,44,52\dots$	длина r^3
$n = 16,32,48,80,96,112\dots$	длина r^2
$n = 64,128,192,320,384,448\dots$	длина r
$n = 0,256,512,768,1024\dots$	длина 1

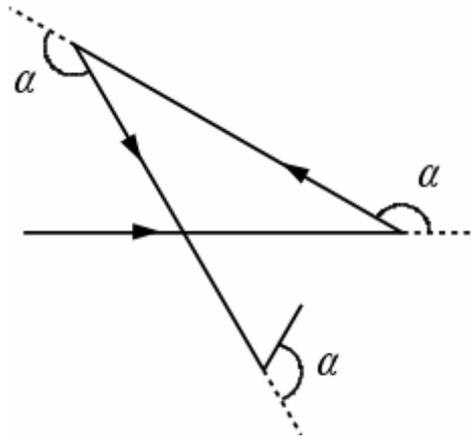


Рис.14. Схема построения звездного фрактала

Отсюда следует, что длина отрезка с индексом n зависит от числа множителей 4 в n . Обобщим это правило так, чтобы можно было построить другой звездный фрактал. Обозначим число шагов через p и возьмем произвольное число v вместо 4.

Тогда мы получим общее правило:

n не имеет множителя v	длина r^{p-1}
n имеет 1 множитель v	длина r^{p-2}
...	...
n имеет, по крайней мере, $(p-1)$ множителей v	длина 1

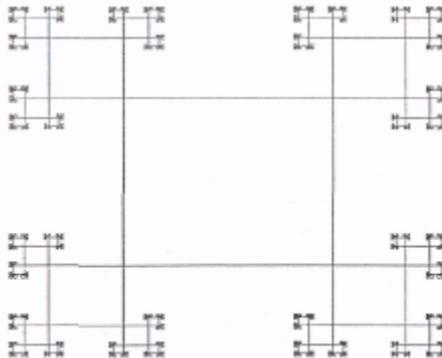


Рис.15. Квадратичный звездный фрактал

В общем случае индекс отрезка изменяется от 0 до $(v+1)v^{p-1}$. Из них ровно $v+1$ отрезков самой большой длины 1; $(v+1)(v-1)$ – длины r ; $(v+1)(v^2-v)$ – длины r^2 и т. д. Рис.13 был построен для $p=5, v=4, \alpha = \frac{4\pi}{5}, r=0.35$. На рис.15 показан фрактал, построенный для $p=7, v=3, \alpha = \frac{\pi}{2}, r=0.47$.

Список литературы

1. Введение в теорию фракталов – Электрон. текстовые дан. – Режим доступа: <http://textarchive.ru/c-2513719.html>, свободный.
2. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / Морозов А.Д. – Москва: институт компьютерных исследований, 2002, - 160 с.