УДК 514.8, 530.12

ОТНОШЕНИЕ ЗАРЯДА К МАССЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ГЕОНА

Анастасия Вячеславовна Шитова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: shitova_nastya96@mail.ru

Юлия Владимировна Чемарина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: chemarina.yv@tversu.ru

Ключевые слова: скалярное поле, электромагнитное поле, топологический геон.

Аннотация. Статья посвящена изучению свойств сферически-симметричных топологических геонов, образованных фантомным скалярным и электромагнитным полями.

Объектом нашего исследования является фантомный заряженный сферически-симметричный топологический геон со скалярным полем. В работе доказана неограниченность возможного отношения заряда геона к его гравитационной массе. Этот результат интересен тем, что для реалистичных моделей с обычным скалярным полем соответствующее отношение является ограниченным [1], [3].

Метрику статического сферически-симметричного пространства-времени запишем в форме

$$ds^2 = e^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{1}$$

где метрическая f зависит только от r.

Электромагнитный потенциал, совместимый со сферической симметрией, для статической конфигурации имеет вид $A = \sigma(r)dt$, так что из уравнений Максвелла следует, что

$$\mathcal{F} = e^F \frac{q}{r^2} dt \wedge dr.$$

Уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij} = æT_{ij}. \tag{2}$$

Динамическое уравнения для скалярного поля ϕ имеет вид

$$\Box\phi - V'_\phi = 0. \tag{3}$$

Решение уравнений (2) – (3) было получено в работах [2], [4], [5] в виде интегральных формул:

$$F = \int_r^\infty \phi'^2 r dr,\ \ f = 2r^2 e^{-2F}\left(\int_r^\infty \frac{Q - 3m}{r^4} e^F dr\right), \tag{4}$$

$$\tilde{V}(r) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3f - 1r^2\phi'^2 f + 2e^{-F}\frac{Q - 3m}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right), \tag{5}$$

где

$$Q(r) = \xi(r) + 2q^2 \int_r^\infty (e^F/r^2)\,dr, \qquad \xi(r) = r + \int_r^\infty (1 - e^F)\,dr. \tag{6}$$

В случае фантомных полей удобно преобразовывать данное решение к другому виду, явно учитывающему топологию геона. Функция $\xi(r)$ может быть выбрана в качестве новой радиальной координаты. Используя обозначение $A = fe^{2F}$ и, подставляя $d\xi = e^F dr$ в метрику (1) и формулы (4), (5), мы можем записать решение в следующем виде

$$ds^2 = Adt^2 - \frac{d\xi^2}{A} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{7}$$

$$\phi_\xi = \sqrt{r_{\xi\xi}/r}, \qquad Q(\xi) = \xi + 2q^2 \int_\xi^\infty \frac{d\xi}{r^2}, \tag{8}$$

$$A(\xi) = 2r^2 \int_\xi^\infty \frac{Q - a}{r^4}\,d\xi, \qquad f(\xi) = r_\xi^2 A(\xi), \tag{9}$$

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3r_\xi^2 A - r_{\xi\xi}A + 2r\frac{Q - a}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right), \tag{10}$$

где a – постоянная, а функция $r(\xi)$ класса C^2 во всей области определения должна удовлетворять условию $r_{\xi\xi} > 0$. Задавая неотрицательную выпуклую вниз функцию $r(\xi)$, мы можем полностью восстановить решение.

В асимптотической области $\xi \to +\infty$:

$$r = \xi + b + o(1), \;\; A = 1 - \frac{2m}{\xi} + \frac{q^2 + 2mb}{\xi^2} + o\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \; \xi \to +\infty. \tag{11}$$

Прямая подстановка асимптотики (11) для $r(\xi)$ в (9) дает следующую формулу гравитационной массы конфигурации:

$$m = \frac{a + b}{3}. \tag{12}$$

Решение (7) – (10) представляет собой симметричную конфигурацию с изометрией $\xi \to -\xi$ тогда и только тогда, когда в подынтегральном выражении в (9) стоит нечетная функция и $r(\xi)$ четная функция, поскольку только при этих условиях метрическая функция $A(\xi)$ четная. Это возможно при таком значении постоянной a:

$$a = 2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}. \tag{13}$$

Таким образом, постоянная a не произвольна, а определяется через интеграл (13), т.е. зависит от величины заряда, и от поведения функции $r(\xi)$ на всей полупрямой. Следовательно, значения массы и заряда оказываются связанными величинами.

Мы исследуем связь между величинами (q, m, r_0), где $r_0 = \min r(\xi)$. А именно, может ли отношение $\frac{q}{m} \to \infty$ при ограниченном сверху r_0 и ограниченном снизу q?

Будем считать, что функция $r(\xi)$ является известной, причем выберем размер геона $r_0 = 1$. В силу масштабной инвариантности формул (7) – (10) это не накладывает дополнительных ограничений на решение.

Так как гравитационная масса m вычисляется по формуле (12), а параметр a – по формуле (13), то отношение заряда к массе равно

$$\frac{q}{m} = \frac{3q}{2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2} + b}. \tag{144}$$

Рассмотрим два логически возможных случая.

1) $b \geq 0$.

В этом случае

$$m > \frac{2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}{3}.$$

Так как $r < \xi + 1$, то

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2} > \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + 1)^2} = 1.$$

Тогда:

$$m > \frac{2q^2}{3} \Rightarrow \frac{q}{m} < \frac{3}{2q}.$$

Получаем, что ограниченность заряд q снизу влечет ограниченность отношения $\frac{q}{m}$ сверху.

2) $b < 0$.

При $q \epsilon \left(\sqrt{\frac{-b}{2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}}; +\infty \right)$ отношение $\frac{q}{m}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Чтобы получить неограниченно большое отношение $\frac{q}{m}$ необходимо, чтобы $q \to \sqrt{\frac{-b}{2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}}$. Но при этом $m \to 0$. Поэтому далее мы ограничимся рассмотрением предельного случая, т.е. решений с нулевой гравитационной массой.

Для таких решений остается открытым вопрос о возможных значениях оставшихся параметров q и r_0. При нормировке $r_0 = 1$ необходимо установить величину заряда q.

Если $m = 0$, то $a + b = 0$ и $a = -b$. Выразим q^2 из (13):

$$q^2 = \frac{-b}{2\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}. \tag{15}$$

Отметим ряд особенностей решений с нулевой гравитационной массой:

1) Топологический геон можно получить только при условии $b < 0$.
2) Заряд q однозначно определен функцией $r(\xi)$, при этом решение может оказаться не топологическим геоном, а черной дырой с топологической особенностью под горизонтом событий.
3) Решение будет являться топологическим геоном тогда и только тогда, когда:

$$A(0) = 2\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^\xi \left(1 - \frac{2q^2}{r^2}\right) d\xi}{r^4} \right) > 0. \tag{16}$$

Очевидно, что из формулы (16) оценить величину q достаточно сложно. Приведем верхнюю оценку для величины заряда q, которую нам удалось получить с помощью конкретных решений.

Выберем $r(\xi)$ в следующем виде:

$$r(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < k \\ 1 + (\,|\xi| - k)h\,, & k \leq |\xi| \leq l\,, \\ |\xi| - 2, & l < |\xi| \end{cases}$$

где

$$h = \frac{n-1}{n},\ k = \frac{1}{n^2},\ l = \frac{3n^3 - n + 1}{n^2},\ n \epsilon \mathbb{N},\ b = -2.$$

Величину заряда q будем искать по формуле (15):

$$q = \sqrt{\frac{(3n^3 - n + 1 - 2n^2)n^2}{3n^5 + n^4 + 2n^3 - n + 1 - 2n^2}}.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ заряд $q \to 1$.

Используя формулу (16), найдем значение метрической функции A в точке $\xi = 0$:

$$A(0) = \frac{81n^{17} - 81n^{16} + 261n^{15} - 246n^{14} + 201n^{13} - 165n^{12}}{3n^4(3n^5 + n^4 + 2n^3 - 2n^2 - n + 1)(3n^3 - 2n^2 - n + 1)^3} +$$

$$\frac{-789n^{11}+1350n^{10}+167n^9-1418n^8+501n^7+585n^6}{3n^4(3n^5+n^4+2n^3-2n^2-n+1)(3n^3-2n^2-n+1)^3}+$$

$$\frac{-397n^5-75n^4+115n^3-12n^2-12n+3}{3n^4(3n^5+n^4+2n^3-2n^2-n+1)(3n^3-2n^2-n+1)^3}.$$

Метрическая функция A в точке $\xi=0$ положительна при любых $n\epsilon\mathbb{N}$. Это означает, что решение может быть интерпретировано как топологический геон при любом $n\epsilon\mathbb{N}$.

Построенный модельный пример показывает, что возможно добиться любой величины заряда $q\epsilon[0,1)$ при $r_0=1$ и заряда $q\epsilon[0,r_0)$ в случае геона произвольного размера.

Наше исследование показало, что сферически-симметричные статические топологические геоны с фантомным скалярным полем могут обладать сколь угодно большим отношением заряда к гравитационной массе. При росте этого отношения гравитационная масса стремится к нулю, а величина заряда геона оказывается ограниченной сверху его размером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kratovich P.V., Tchemarina Ju.V. On the charge-to-mass ratio for selfgravitating systems of scalar and electromagnetic fields // Mathematical Modelling and Geometry. 2017. Т. 5. № 2. С. 20–29.

2. Kratovitch P.V., Potashov I.M., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. Topological geons with self-gravitating phantom scalar field // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Volume 934. Issue 1. art. no. 012047. DOI: 10.1088/1742-6596/934/1/012047

3. Голубева Е.В., Чемарина Ю.В. Об отношении заряда к массе для системы скалярного и электромагнитного полей // Применение функционального анализа в теории приближений. 2014. № 35. С. 63–71.

4. Малинкина А.Н., Чемарина Ю.В. Фантомное скалярное поле. Кротовые норы и черные дыры // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. №33. С. 75–81.

5. Соловьев Д.А., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Математические модели гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 23. С. 7–18.