УДК 517.54

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ С.Н. БЕРНШТЕЙНА И В.И. СМИРНОВА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Сергей Юрьевич Граф
Тверской государственный университет, Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

Иван Александрович Никитин
Тверской государственный университет, Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: greatmath18@yandex.ru

Ключевые слова: *гармонические полиномы, неравенство Бернштейна, неравенство Смирнова.*

Аннотация. В сообщении анонсируются результаты, обобщающие известные дифференциальные неравенства С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова на случай гармонических полиномов.

Исследованию свойств многочленов на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ посвящено огромное количество работ как российских, так и зарубежных математиков (см., например, [1–7]). Одной из классических задач данного направления является задача о дифференциальных неравенствах, связывающих многочлены и их производные. Данная тематика сохраняет актуальность, о чем свидетельствует значительное число связанных с ней новых результатов [6–9].

Обозначим символом $\mathbf{D}$ единичный круг $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, а символом $\mathbf{T}$ – единичную окружность $\partial\mathbf{D}$. Символом $\deg P$ будем обозначать степень n многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$.

В 1930 г. С.Н. Бернштейн доказал следующую теорему.

Теорема A [2]. *Пусть* H, h *– многочлены, такие, что*

1) все нули H *лежат в замыкании круга* $\mathbf{D}$,

2) $\deg H \geq \deg h$ *и*

3) $|H(z)| \geq |h(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$.

Тогда

$$|H'(z)| \geq |h'(z)| \text{ в } \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}.$$

Неравенство Бернштейна играет существенную роль в теории многочленов и восходит к задаче об оценке модуля производной действительных многочленов на отрезке, поставленной в 1887 г. Д. И. Менделеевым [1]. Впоследствии неравенство Бернштейна неоднократно обобщалось на случаи различных дифференциальных операторов, определенных на линейном пространстве полиномов n-й степени [4–7].

Другим классическим результатом теории многочленов является неравенство В.И. Смирнова.

Теорема B ([3]). *Пусть* H, h *– многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы А. Тогда для любых фиксированных* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$

$$\left|zH'(z) - aH(z)\right| \geq \left|zh'(z) - ah(z)\right|$$

для всех значений a*, принадлежащих образу круга* $\{\varsigma : |\varsigma| \leq |z|\}$ *при конформном отображении* $\phi_n(\varsigma) = n\varsigma/(1+\varsigma)$.

Неравенство Бернштейна получается из неравенства теоремы B при $\alpha = 0$.

Гармоническим многочленом называется функция вида

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)},$$

где H, G – многочлены с комплексными коэффициентами. Для определенности далее по умолчанию будем считать, что $G(0) = 0$.

Поведение гармонических многочленов в общем случае существенно отличается от аналитического случая. В частности, открытой остается проблема оценки количества нулей гармонического многочлена [8,9]. Очевидно, что в случае, когда $\deg H = \deg G$ нули F не обязаны быть изолированными и их множество может быть несчётным. Тем не менее, известно [8], что при условии $\deg H \neq \deg G$ нули F изолированы, и их количество не превосходит n^2, где $n = \max\{\deg H, \deg G\}$, хотя точная оценка остается неизвестной. В некоторых специальных случаях (см., например, [9]) получены уточнения данной оценки числа нулей гармонических многочленов. Далее будем считать, что $\deg H = n > m = \deg G$.

Основным результатом, анонсируемым в данном сообщении, являются обобщения Теорем А и В на случай гармонических многочленов.

Теорема 1. *Пусть* $F = H + \overline{G}$, $f = h + \overline{g}$ *– гармонические многочлены, такие, что*

1) все нули F *лежат в замыкании круга* $\mathbf{D}$,

2) $\deg H \geq \deg h$, $\deg H \geq \deg G$ *и* $G(z)/H(z) \to 0$ *при* $z \to \infty$,

3) $|H(z)| > |G(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$ *и*

4) $|H(z)| \geq |h(z)| \geq |g(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$.

Тогда существует константа K_0,

$$1 \leq K_0 \leq \frac{1 + \sup_{z \in \mathbf{T}} |g(z)/h(z)|}{1 - \max_{z \in \mathbf{T}} |G(z)/H(z)|}, \qquad (1)$$

такая, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$K_0\left|H'(z) + e^{i\alpha}G'(z)\right| \geq \left|h'(z) + e^{i\beta}g'(z)\right| \text{ в } \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}. \qquad (2)$$

Оценка K_0 *в неравенстве (1) точна.*

Заметим, что в случае, когда многочлены F и f являются аналитическими, утверждение теоремы соответствует классическому неравенству Бернштейна для многочленов.

Следующий пример демонстрирует, что в общем случае величина K_0 в теореме 1 не может быть заменена на 1.

Рассмотрим гармонические полиномы

$$F(z)=H(z)+\overline{G(z)}=d(cz^2-\bar{z}) \text{ и } f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=cz^2+\bar{z}$$

и подберем действительные параметры $c,d>1$ так, чтобы F и f удовлетворяли условиям теоремы.

Во-первых, заметим, что в этом случае нули многочлена F расположены в круге $\mathbf{D}$. Действительно, $F(re^{it})=d(cr^2e^{2it}-re^{-it})$ и, следовательно, многочлен F обращается в ноль при выполнении какого-либо из условий $r=0$ или $cre^{3it}=1$. Таким образом, гармонический многочлен F имеет четыре нуля в точках $z=0$ и $z=c^{-1}e^{i2\pi k/3}$ при $k=0,1,2$. Все эти точки расположены в единичном круге, если $c>1$.

На единичной окружности $\mathbf{T}$ неравенства

$$|H(z)|=cd>d=|G(z)| \text{ и } |H(z)|=cd>c=|h(z)|>1=|g(z)|$$

выполняются при любых значениях $c,d>1$. Таким образом, гармонические многочлены F и f удовлетворяли условиям теоремы.

Вместе с тем, нетрудно убедиться, что

$$\min_{|z|=1}|H'(z)+G'(z)|=d(2c-1) \quad \text{и} \quad \max_{|z|=1}|h'(z)+g'(z)|=2c+1,$$

причём минимум и максимум достигаются в обоих случаях при $z=1$.

Множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} c>1, \quad d>1, \\ d(2c-1)<2c+1. \end{cases} \tag{3}$$

не пусто и представляет собой совокупность точек (c,d) плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченных прямыми $c=1,\ d=1$ и гиперболой $d=\dfrac{2c+1}{2c-1}$. Например, системе неравенств (3) удовлетворяет пара значений $c=2,\ d=3/2$. Если параметры $c,\ d$ являются решениями системы (3), то

$$|H'(1)+G'(1)|=d(2c-1)<2c+1=|h'(1)+g'(1)|$$

и, следовательно, неравенство (2) не выполняется в $\mathbf{C}\setminus\mathbf{D}$, и для данной пары гармонических многочленов F и f константа K_0 в теореме 1 строго больше 1. Более того, в приведенном примере неравенство (2) может выполняться только при условии

$$K_0\geq\frac{1}{d}\frac{1+1/(2c)}{1-1/(2c)}=\frac{1}{d}\frac{1+\max_{z\in\mathbf{T}}|g(z)/h(z)|}{1-\max_{z\in\mathbf{T}}|G(z)/H(z)|}.$$

Параметр d в рассмотренном примере может быть сколь угодно близок к 1, что и доказывает точность верхней оценки K_0 в неравенстве (1).

Точность нижней оценки в (1) очевидна в случае, когда $G\equiv 0,\ g\equiv 0$, т.е. в случае аналитических многочленов.

Следующая теорема представляет собой обобщение неравенства Смирнова на случай гармонических многочленов.

Теорема 2. *Пусть* $F = H + \overline{G}$, $f = h + \overline{g}$ *– гармонические многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 1.*

Тогда существуют константа K_0, *удовлетворяющая условию (1), и величина* R_0,

$$0 < R_0 \le \sup\{r \le 1 : |H(z)| > |G(z)| \text{ для всех } z, |z| > 1/r\},$$

такие, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *и для любого фиксированного* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$

$$K_0 \left| z\left(H'(z) + e^{i\alpha} G'(z)\right) - a\left(H(z) + e^{i\alpha} G(z)\right)\right| \ge \left| z\left(h'(z) + e^{i\beta} g'(z)\right) - a\left(h(z) + e^{i\beta} g(z)\right)\right|$$

для всех значений a, *принадлежащих образу круга* $\{\varsigma : |\varsigma| \le R_0 |z|\}$ *при отображении* $\phi_n(\varsigma) = n\varsigma/(1+\varsigma)$. *Оценка* K_0 *в неравенстве (1) точна.*

При $G \equiv 0$ и $g \equiv 0$ утверждение теоремы 2 представляет собой классическое неравенство Смирнова для многочленов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 17-11-01229.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Д.И. Менделеев, *Исследование водных растворов по удельному весу*, тип. В. Демакова, Санкт-Петербург, 1887.

[2]. S.N. Bernstein, *Sur la limitation des derivees des polynomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **190** (1930), 338–341.

[3]. В.И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.

[4]. M. Marden, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, Math. Surveys, 3, Amer. Math. Soc., New York, 1949.

[5]. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.

[6]. E.G. Ganenkova, V.V. Starkov, *Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **476** (2) (2019), 696–714, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.04.006

[7]. Е.Г. Ганенкова, В.В. Старков, *Преобразование Мёбиуса и неравенство В. И. Смирнова для многочленов*, Мат. заметки, **105** (2) (2019), 228–239, https://doi.org/10.4213/mzm11858

[8]. A.S. Wilmshurst, The valence of harmonic polynomials, Proc. AMS, **126** (7) (1998), 2077–2081, https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04315-9

[9]. D. Khavinson, S. Lee, A. Saez, *Zeros of harmonic polynomials, critical lemniscates, and caustics*. Complex Anal. Synerg., **4** (2) (2018), https://doi.org/10.1186/s40627-018-0012-2