Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»
Математический факультет
Кафедра математического анализа
Специальность «Компьютерная безопасность»

КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Приложения определенного и несобственного интегралов

Выполнил:
Степанов П. А., группа М-25

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент Баранова О. Е.

Тверь 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Основные определения.

Определение интеграла по отрезку.

Пусть на отрезке [a, b] задана функция f(x). Отрезок [a, b] точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < b = x_n$ разобьем на n элементарных отрезков [xi-1, xi] (i = 1, 2, …, n) длины $Dx_i = x_i - x_{i-1}$, в каждом из этих отрезков [xi-1, xi] возьмем произвольную точку ξi и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta xi$, называемую интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a, b].

Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм, при условии, что длина наибольшего Dx_i из элементарных отрезков стремится к нулю (n → ∞), и предел не зависит ни от способа разбиения отрезка [a, b], ни от выбора точек ξi, то этот предел называется определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{max\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta x_i.$$

Определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x)$.

Определение несобственного интеграла по неограниченному промежутку.

Пусть функция $f(x)$ определена на полуоси $[a, +\infty)$ и интегрируема по любому отрезку $[a,b]$, принадлежащему этой полуоси. Предел интеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до $+\infty$ и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Несобственный интеграл первого рода выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Определение несобственного интеграла от неограниченной функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, b]$, интегрируема по любому отрезку $[a + \varepsilon, b](0 < \varepsilon < b - a)$, и имеет бесконечный предел при $x \to a + 0:\ \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Несобственным интегралом от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится.

Несобственный интеграл второго рода выражает площадь бесконечно высокой криволинейной трапеции.

Формулы, связанные с геометрическим приложением интеграла.

Площадь плоской фигуры ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x), y = y_2(x), (y_2(x) \geq y_1(x))$ и двумя прямыми $\mathrm{x = a}$ и $\mathrm{x = b}$ $(\mathrm{a < b})$ равна:

$$S = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx.$$

Если $x = x(t), y = y(t)\ [0 \leq t \leq T]$ – параметрические уравнения кусочно гладкой простой замкнутой кривой C, пробегаемой против хода часовой стрелки и ограничивающей слева от себя фигуру с площадью S, то:

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt\ = \int_a^b x(t)y'(t)dt,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)y'^{(t)} - y(t)x'(t))\ dt.$$

Площадь сектора, ограниченного непрерывной кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полупрямыми $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ равна:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\ d\varphi.$$

Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y = y(x)$ $(\mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b})$ равна:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\ dx.$$

Если кривая C задана уравнениями $x = x(t), y = y(t)\ (t_0 \leq t \leq T)$, где $x(t), y(t) \in \mathrm{C}^{(1)}[t_0, t]$, то длина дуги кривой C равна:

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt.$$

Если $r = r(\varphi)\ (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, где $r(\varphi) \in \mathrm{C}^{(1)}[\alpha, \beta]$, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна:

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\ d\varphi.$$

Если V объем тела существует и $S = S(x)\ [a \leq x \leq b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)$, где $y(x)$ – непрерывная однозначная функция, равен:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx.$$

В более общем случае, объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – непрерывные неотрицательные функции, равен:

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))\, dx.$$

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси Ox, равна:

$$P = 2\pi \int_A^B |y| ds,$$

где ds – дифференциал дуги.

Решение задач

№2494(1)

$x(t) = 3t^2, y(t) = 3t - t^3,\ y'(t) = 3 - 3t^2.$

$y = 0 \ => \ t_{1,2} = \ \pm\sqrt{3}.$

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt\,.$$

$$S = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} ((3t - t^3)6t\,)dt = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (18t^2 - 6t^4)dt = -\left(36\sqrt{3} - 108\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{72\sqrt{3}}{5}.$$

Ответ: $\frac{72\sqrt{3}}{5}$.

№2543

ρ = aϕ.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\rho(\phi)^2 + \rho'(\phi)^2)}\ d\phi.$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\mathrm{a}\phi^2 + \mathrm{a}^2)}\,d\phi = \mathrm{a}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\phi^2 + 1)}\,d\phi =$$

$$= \mathrm{a}\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\,\right|.$$

Ответ: $\mathrm{a}\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\,\right|$.

№2538

$x = 3t^2, y = t - \frac{t^3}{3},\ x' = 2t\,, y' = 1 - t^2.$

$y = 0 \ => \ t_{1,2} = \ \pm\sqrt{3}.$

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + (1 - t^2)^2}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{2t^2 + 1 + t^4}\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2 + 1)\,dt = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

<u>№2481</u> (см. прил. 1)

$y = 2x^2e^x$, $y = -x^3e^x$.

$2x^2e^x = -x^3e^x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2.$

$$S = \int_{-2}^{0} (2x^2e^x + x^3e^x)dx = 2\int_{-2}^{0} x^2e^x dx + \int_{-2}^{0} x^3e^x dx.$$

1) $2\int_{-2}^{0} x^2e^x dx = |U = x^2, dV = e^x dx, V = e^x, dU = 2xdx| =$

$$= -\frac{8}{e^2} - 4\int_{-2}^{0} xe^x dx = |U = x, dV = e^x dx, V = e^x, dU = dx| =$$

$$= -\frac{8}{e^2} - \frac{8}{e^2} + 4\int_{-2}^{0} e^x dx. = -\frac{8}{e^2} - \frac{8}{e^2} + 4 - \frac{4}{e^2} = -\frac{20}{e^2} + 4.$$

2) $\int_{-2}^{0} x^3e^x dx = |U = x^3, dV = e^x dx, V = e^x, dU = 3x^2dx| =$

$$= \frac{8}{e^2} - 3\int_{-2}^{0} x^2e^x dx = \frac{8}{e^2} - \frac{3}{2}\left(-\frac{20}{e^2} + 4\right) = \frac{38}{e^2} - 6.$$

3) $S = -\frac{20}{e^2} + 4 + \frac{38}{e^2} - 6 = \frac{18}{e^2} - 2.$

Ответ: $\frac{18}{e^2} - 2.$

<u>№2495(б)</u> (см. прил. 2)

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (a^2(\text{ф} + 4\pi)^2 - a^2(\text{ф} + 2\pi)^2)d\text{ф} = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi} (4\pi\text{ф} + 12\pi^2)d\text{ф} = 16a^2\pi^3.$$

Ответ: $16a^2\pi^3$.

№2563

$$V = \pi \int_0^1 arcsin^2 x\, dx = \left| U = arcsin^2 x, dU = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, dV = dx, V = x \right| =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - 2\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \left| U = \arcsin x\,, dU = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, dV = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, v = -\sqrt{1-x^2} \right| =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} - 2\,\pi = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right).$$

Ответ: $\pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$.

№2509

$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$

$x = \rho\cos\phi\,, y = \rho\sin\phi\,, x^2 + y^2 = \rho^2.$

$\rho^4 - a^2\rho^2 cos^2\phi - b^2\rho^2 sin^2\phi = 0, a^2cos^2\phi + b^2sin^2\phi = \rho^2.$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2 d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a^2cos^2\phi + b^2sin^2\phi)d\phi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (a^2 + b^2(a^2 - b^2)\cos 2\phi)d\phi = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$.

№2608

$$S = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}}dx =$$

$$= |u = e^{x}, du = e^{-x}dx, x = 0 \to u = 1, x = \infty \to u = \infty| =$$

$$= 2\pi\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}}{u^2}du = \left|s = \frac{1}{u}, ds = -\frac{1}{u^2}, u = 1 \to s = 1, u = \infty, s = 0\right| =$$

$$= -2\pi\int_1^{0}\sqrt{s^2+1}ds = 2\pi\int_0^{1}\sqrt{s^2+1}ds =$$

$$= \left|s = tg(s), ds = \frac{1}{cos^2(t)}, s = 0 \to t = 0, s = 1 \to \ t = \frac{\pi}{4}\right| =$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{tg^2(t)+1}\ \frac{1}{cos^2(t)}dt \ = \ 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos^4(t)}\cos(t)\,dt =$$

$$= \left|\sin(t) = y, dy = \cos(t)\,dt, t = 0 \ \to y = 0, t = \frac{\pi}{4} \to y = \frac{\sqrt{2}}{2}\right| =$$

$$= \ 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-y^2)^2}dy = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{2-\sqrt{2}} - \frac{2}{2+\sqrt{2}} + \ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{2} \ + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right) = \ \pi\left(\sqrt{2} + \ ln(1+\sqrt{2)}\right).$$

Ответ: $\pi\left(\sqrt{2} + \ ln(1+\sqrt{2)}\right)$.

№2407

$$y = \frac{x^3}{2a-x}, x = 2a$$

$$\mathrm{S} = 2\int_0^{2a} x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx = \left|t = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\ , x = \frac{2t^2a}{1+t^2}\ , dx = \frac{4ta}{(1+t^2)^2}\ dt\right| =$$

$$= 16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(1+t^2)^3}dt = 16a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^3}\right)dt =$$

$$= \ 16a^2\ \lim_{t\to\infty}\int_0^{t}\left(\frac{3}{8}arctg(t) - \frac{5}{8(1+t^2)} + \frac{t}{4(1+t^2)^2}\right)dt = 3\pi a^2.$$

Ответ: $3\pi a^2$.

№2439

$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \left(0 \le x \le \frac{5}{3}a\right).$

$y = tx \to \begin{cases} x = \frac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{at^3}{1+t^2}. \end{cases} \to \begin{cases} x' = \frac{4at}{(1+t^2)^2}, \\ y' = \frac{4at^4+6at^2}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$

$0 \le x \le \frac{5}{3}a \to 0 \le t \le \sqrt{5}.$

$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{2at\sqrt{t^2+4}}{1+t^2}.$

$$S = \int_0^{\sqrt{5}} 2\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{1+t^2}dt =$$

$$= \left| t = 2tg\phi;\ t = 0 \to \phi = 0, t = \sqrt{5} \to \ \phi = arctg\frac{\sqrt{5}}{2}; dt = 2\frac{d\phi}{\cos^2\phi} \right| =$$

$$= 32a \int_0^{arctg\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin\phi\, d\phi}{\cos^2\phi(4 - 3\cos^2\phi)} =$$

$$= \left| z = \cos\phi;\ \sin\phi\, d\phi = -dz;\ \phi = 0 \to z = 1, \phi = arctg\frac{\sqrt{5}}{2} \to z = \frac{2}{3} \right| =$$

$$= \frac{-32a}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{dz}{z^2\left(z^2 - \frac{4}{3}\right)} = \frac{-32a}{3}\left(\frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{dz}{z^2} - \frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{dz}{z^2 - \frac{4}{3}}\right) =$$

$$= 4a\left(1 + \sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Ответ: $4a\left(1 + \sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$

№2466 (см. прил. 3)

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}.$

$-\sqrt{ax - x^2} \le \boldsymbol{y} \le \sqrt{ax - x^2}.$

Площадь поперечного сечения:

$S = 2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}\, dy = a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + (a^2 - x^2)arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$

Объем:

$$V = 2\int_0^a \left(a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + (a^2 - x^2)arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right) dx = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

Ответ: $\frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$

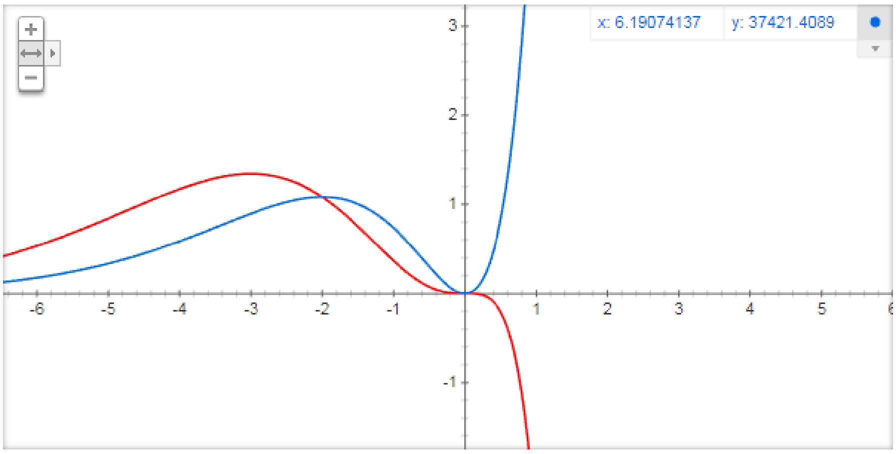
Список литературы.

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. уи-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учебное пособие для вузов. — 20-е изд. М.-. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 384 с.
3. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособие для вузов. — 3-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 672 с.

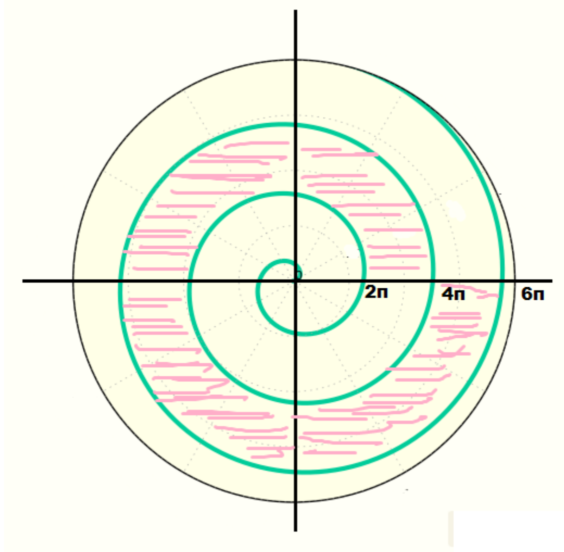
Приложения

Приложение 1. График к задаче №2481

Графики функций 2*x^2*e^x, (-(x^3))*e^x



Приложение 2. График к задаче №2495(б)



Приложение 3. График к задаче №2466