Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики
Направление «Фундаментальная информатика и информационные технологии»
Кафедра информационных технологий

Курсовая работа
по дисциплине
«Кратные интегралы и ряды»

На тему:
«Разложение рядов (вариант 6)»

Выполнила: студентка 26 группы
Демьянова Виктория Вадимовна

Проверил: профессор
Климок Виктор Иванович

Тверь - 2015

Оглавление:

1.Задание:

Разложить в степенной ряд (теоретически доказав, что это возможно) функцию по целым неотрицательным степеням x. Указать промежуток сходимости. «Найти» сумму на ЭВМ, взяв n слагаемых разложения. Изобразить графически постепенное приближение частичных сумм ряда к функции. Функция f(x) = cos *x*.

2.Теоретическая часть:

2.1 Определения

Бесконечный ряд-это сумма бесконечной последовательности чисел

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ ... называемых *членами ряда*. Ряд записывается в виде:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Функциональный ряд- ряд, каждым членом которого, в отличие от числового ряда, является не число, а функция $u_k(x)$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_k(x)$$

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ - постоянные, коэффициенты степенного ряда.

Частичная сумма-сумма первых н членов ряда. $A_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

Сходящийся ряд-ряд у которого существует предел частичных сумм ряда и он конечен.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \text{c. c} \neq \infty.$$

Ряд называется *абсолютно сходящимся* если сходится ряд, составленный из модулей его членов

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$$

Признак сходимости Даламбера: Для ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ возьмём переменную $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Если переменная D_n имеет конечный предел = D и если D<1, то ряд сходится. Если D>1 расходится. При D=1 поведение ряда не ясно.

Интервал сходимости степенного ряда-это такое множество чисел А, что при x∈A ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_k(x)$ сходится абсолютно.

2.2 Ряд Тейлора

Ряд Тейлора для функции f(x) в окрестности точки a –степенной ряд вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

В случае, если a=0, такой ряд также называется рядом Маклорена.

Если функция $f(x)$ имеет производные сколь угодно высоких порядков в промежутке $|x-a|<R$, и существует постоянная, такая, что при любых x и n из промежутка $|x-a|<R$ удовлетворяет неравенству $|f^n(x)|<C$, то функция $f(x)$ разлагается в этом промежутке в ряд Тейлора при любом a.

Теорема. Для того чтобы ряд Тейлора (Маклорена) сходился на промежутке (x_0 − R, x_0 + R) (для ряда Маклорена (-R, R) соответственно) и имел своей суммой f(x) необходимо и достаточно , чтобы на (x_0 − R, x_0 + R) (для ряда Маклорена (-R, R)) остаточный член R_n(x) ряда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}*(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}*(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}*(x-x_0)^n+R_n(x)$$

Стремился к нулю при n → ∞ т.е. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{R}_n(\mathrm{x}) = 0$ при любом x ∈ (x_0−R,x0+R)

Остаточный член ряда Тейлора можно представить в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta \mathrm{x})}{(n+1)!}*x^{n+1}$$

Где $0<\theta<1$.

Если функция на промежутке (-H; +H) имеет производные всех порядков и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются по абсолютной величине ограничены, одним и тем же числом:
$\left|f^{(n)}(x)\right|<L$, L не зависит от H, то во всем промежутке имеет место разложение

$$\mathrm{f}(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)*x}{1!}+\frac{f^{(2)}(0)*x^2}{2!}+\frac{f^{(3)}(0)*x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)*x^n}{n!}+\cdots$$

3.Практическая часть

Докажем, что функция cos x раскладывается в степенной ряд (по теореме Тейлора).

Найдём производные функции:

$f^{(0)}(x) = \cos x$ при $n \in R$.
$f^{(1)}(x) = -\sin x$ при $n \in R$.
$f^{(2)}(x) = -\cos x$ при $n \in R$.
$f^{(3)}(x) = \sin x$ при $n \in R$.
$f^{(4)}(x) = \cos x$ при $n \in R$.
$f^{(0)}(0) = 1$
$f^{(1)}(0) = 0$
$f^{(2)}(0) = -1$
$f^{(3)}(0) = 0$
$f^{(4)}(0) = 1$
Для всех n = 0, 1, 2,… выполняется равенство

$f^{(n+4*n)}(0) = 1$

$f^{(2n+1)}(0) = 0$

$f^{(n+2 + 4*n)}(0) = -1$

Получаем, что:

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n*\pi}{2})$$

$$0 \leq |\cos(x + \frac{n*\pi}{2})| \leq 1$$

Если функция на промежутке (-∞; +∞) имеет производные всех порядков и все эти производные при изменении x в указанном промежутке оказываются по абсолютной величине ограничены |f(n)(x)|<=1, значит во всем промежутке имеет место разложение:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)*x}{1!} + \frac{f^{(2)}(0)*x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)*x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)*x^n}{n!} + \cdots$$

Разложим в степенной ряд (в ряд Тэйлора) функцию cos x, подставив 1 и -1 в формулу Маклорена и получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

По признаку Даламбера:

Для ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ возьмём переменную $D_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_n = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$D_n= \frac{x^{2n+2} * (2n)!}{(2n+2)! * x^{2n}} = = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{x^2}{(n+2)(n+1)} = 0$$

Переменная D_n имеет конечный предел = 0 и если 0<1, ряд сходится для любого x.

Это также означает, что предполагаемый ряд сходится на интервале (-∞; +∞)

4.Проверка на ЭВМ.

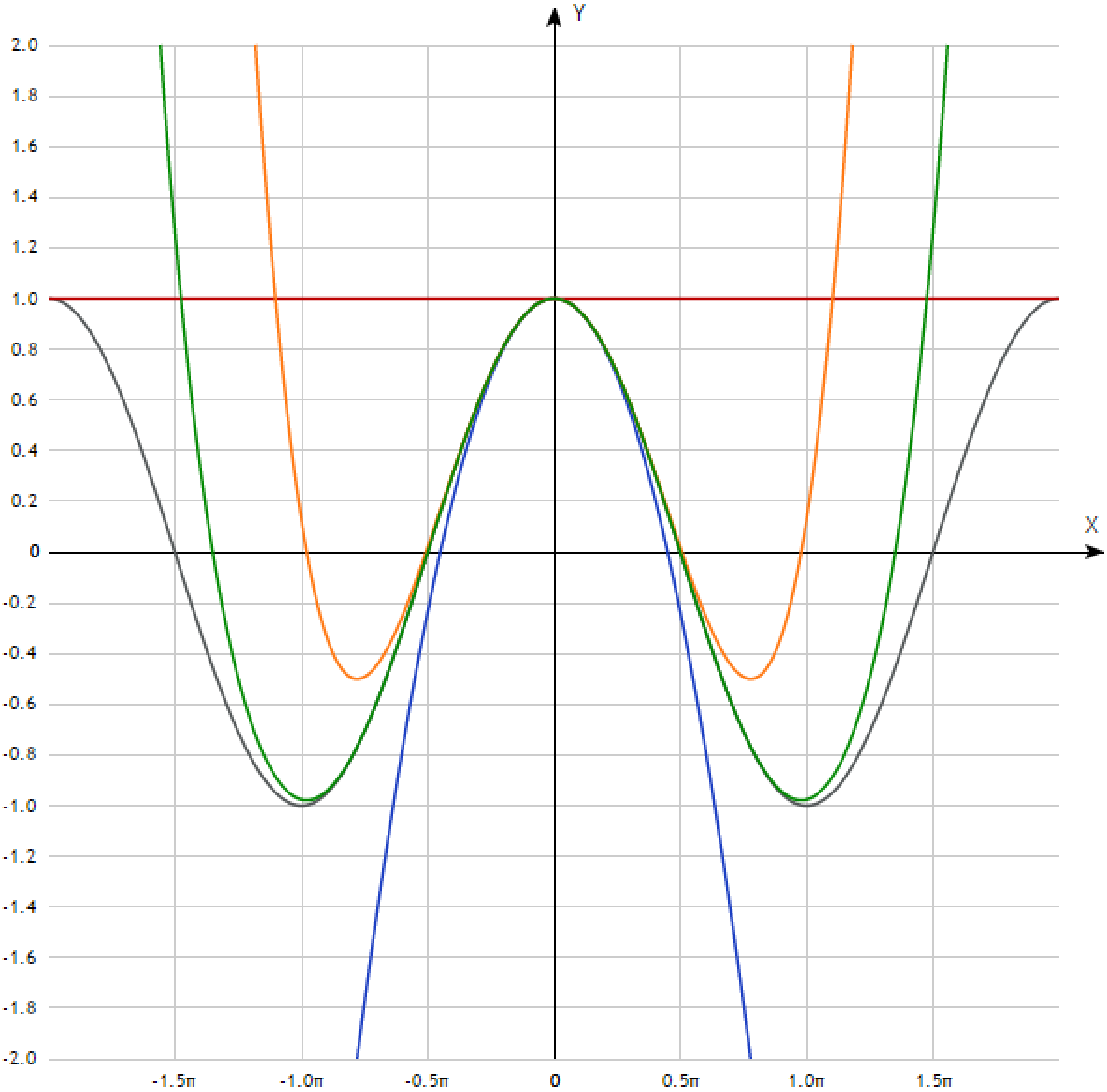
Вычислим сумму на ЭВМ для n-слагаемых. Для этого воспользуемся следующей программой:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

#define PI 3.14159265


double elem(double x, int n) //n-ый член суммы
{
	double res = 1;
	int minus = -1;
	if (n % 2 == 0) // проверка знака члена ряда (-1)^n
		minus = 1;
	//Возводим в степень
	for (int i = 0; i < 2 * n; i++)
		res *= x;
	res *= minus;
	//Делилим на (2*n)!
	for (int i = 1; i <= 2 * n; i++)
		res /= i;

	return res;
}

double cosn(double x, int n) //сумма для n членов ряда, начиная
с 0
{
	double res1 = 0;
	for (int i = 0; i <= n; i++)
		res1 += elem(x, i);
	return res1;
}

int main() {
	int n;
	cin >> n; // Ввод количества членов ряда
	cout.setf(ios::fixed); // настройка cout
	cout.precision(4); // настройка вывода с опр. точностью
	                       // Вывод суммы ряда для x = -2*PI,-
7*PI/2,...2*PI
	for (double i = -2 * PI; i <= 2 * PI; i = i + PI / 4)
		cout << int((i / PI) * 180) << ": " << cos(i) << " == "
<< cosn(i, n) << endl;
	return 0;

}
```

5.Таблица результатов и график

Результаты работы программы представлены в таблице:

x	y=cos x	Сумма 1 члена	Сумма 2 членов	Сумма 3 членов	Сумма 5 членов
-1.5π	0	1	-10.1	10.44	1.27
-1.0π	-1	1	-3.93	0.12	-0.98
-0.5π	0	1	-0.23	0.02	0
0	1	1	1	1	1
0.5π	0	1	-0.23	0.02	0
1.0π	-1	1	-3.93	0.12	-0.98
1.5π	0	1	-10.1	10.44	1.27



$$y(x) = cos(x)$$

$$y(x) = 1$$

$$y(x) = 1 - \frac{xx}{2}$$

$$y(x) = 1 - \frac{xx}{2} + \frac{xxxx}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$y(x) = 1 - \frac{xx}{2} + \frac{xxxx}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{xxxxxx}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{xxxxxxxx}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

6.Вывод

После разложения в степенной ряд функции f(x) = cos *x* и написания программы, которая вычисляет данную сумму на ЭВМ для n членов, вычисления показывают что при росте n возрастает точность суммы ряда и эта сумма стремится к значению функции cos *x*.

7.Список литературы

1. Будак Б. М., Фомин С. В. «Кратные интегралы и ряды», 1967.
2. Запорожец Г.И. «Руководство к решению задач по математическому анализу», 2010.
3. Кудрявцев Л. Д. «Курс математического анализа», 1981.