Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики

Направление «02.03.02 - Фундаментальная информатика и
информационные технологии»

Кафедра математического моделирования

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НА СОВМЕСТНОСТЬ И НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ В КАЖДОМ СЛУЧАЕ СОВМЕСТНОСТИ

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Линейная алгебра и геометрия

Автор:

Демьянова Виктория Вадимовна

1 курс, 16 группа

Научный руководитель:

Старший преподаватель кафедры

математического моделирования,

Шестакова Елена Григорьевна

Тверь 2014

Оглавление

Введение

<u>Задача:</u> исследовать на совместность систему уравнений AX=B, где $A=A_{4x3}$ $B=B_{4x1}$, в зависимости от значений параметров α и β. В каждом случае совместности найти общее решение системы.

Дана система AX=B, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Данные значения элементов матриц A и B:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & \beta \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \\ \alpha & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Теоретические сведения

Для решения поставленной задачи можно использовать следующие теоретические сведения:

1. Определение матрицы
2. Определение ранга матрицы.
3. Определение минора матрицы
4. Определение элементарные преобразования матрицы
5. Определение совместности системы
6. Теорема Кронекера – Капелли.
7. Процедура нахождения ранга матрицы.

Матрица

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Матрицей системы называют матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных, ***расширенной матрицей*** системы – матрицу из коэффициентов с дополнительным столбцом из свободных членов. Если обозначить их соответственно A и $\widetilde{A}$, то

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы — наивысший из порядков миноров этой матрицы, отличных от нуля.

Минор k-го порядка матрицы — это определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы.

Элементарные преобразования — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц. Таким образом,

элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица.
Элементарными преобразованиями строк называют:

- перестановка местами любых двух строк матрицы;
- умножение любой строки матрицы на константу C, C≠0
- прибавление к любой строке матрицы другой строки.

Совместность системы — система совместна, если она имеет хотя бы один набор решений и несовместна, если наборов решений нет.

Теорема Кронекера - Капелли — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений:

> Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных, и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

Процедура нахождения ранга матрицы:

> При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-ого порядка D, отличный от нуля, то требует вычисления лишь минор k+1-ого порядка, окаймляющий минор D. Если они все равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Практическая часть

Нахождение рангов матриц A и AB

Матрица AB имеет размер 4x4, а значит, ее максимальный ранг равен 4. Матрица A имеет размер 4x3, значит, ее максимальный ранг равен 3. Исходная система уравнений будет совместна, только если ранги матриц A и AB будут совпадать. А это, означает, что ранги A и AB не могут быть больше 3.

1.Упростим исходную матрицу с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -II \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -III \\ -3*III \\ \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ *(-1) \\ +II \\ +4*II \end{array} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ \alpha & 0 & -33 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -6*III \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ \alpha+6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Матрица AB имеет единственный минор четвертого порядка. Для совместности системы AB необходимо, чтобы он был равен нулю.

2. Выясним, при каких α и β это будет выполняться:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ \alpha+6 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta-3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \\ \alpha+6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (\beta-3)*(-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \alpha+6 & 1 \end{vmatrix})$$

$$= (3-\beta)*(-1+\alpha+6) = (3-\beta)*(\alpha+5)$$

r(AB) = 4 при $(3-\beta)*(\alpha+5) \neq 0$ => α≠-5 и β≠3.

Таким образом, при α≠-5 и β≠3 минор четвертого порядка матрицы AB не равен нулю, и исходная система несовместна.

Осталось рассмотреть возможные случаи совместности системы. Их три:

1. α=-5 и β≠3
2. α≠-5 и β=3
3. α=-5 и β=3

Рассмотрим первый случай: α=-5 и β≠3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -II \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} -III \\ -3*III \\ \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ *(-1) \\ +II \\ +4*II \end{array} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ -5 & 0 & -33 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -6*III \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +IV \\ \\ \end{array} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +III \\ *(-\frac{1}{8}) \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ *(\beta-3) \\ \\ \end{array} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -III \\ \\ \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(\beta-3) \neq 0, \text{ т.к. } \beta \neq 3$$

r(A)=r(AB)=3. Ранг матриц A и AB равен числу неизвестных, следовательно, у системы есть единственное решение.

Рассмотрим второй случай: $\alpha \neq -5$ и $\beta = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -II \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} -III \\ -3*III \\ \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} *(-1) \\ +II \\ \\ \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ \alpha & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -4*I \end{array} \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & -1 \\ \alpha & 0 & -33 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ *(-1) \\ -5*II \end{array} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ \alpha+5 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 5 \\ \alpha+5 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -1*(-8-5\alpha-25) = 5\alpha+33$$

Если $5\alpha + 33$=0; α= - $\frac{33}{5}$; то при наборе α≠-5, β=3 и α= - $\frac{33}{5}$

r(A)=2, r(AB)=3, система не совместна.

Если $5\alpha + 33$≠0; α≠ - $\frac{33}{5}$; то при наборе α≠-5, β=3 и α≠ - $\frac{33}{5}$;

r(A)=r(AB)=3. Ранг матриц A и AB равен числу неизвестных, следовательно, у системы есть единственное решение.

Рассмотрим третий случай: α=-5 и β=3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 4 & 2 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)_{-II} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{matrix} -III \\ -3 * III \\ \\ \\ \end{matrix} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right)_{-5 * II} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -8 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -16 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -16 \end{vmatrix} = -(16 - 8) = -8 \neq 0$$

r(A)=r(AB)=3. Ранг матриц A и AB равен числу неизвестных, следовательно, у системы есть единственное решение.

Нахождение решений

В первом случае система совместна и имеет одно решение:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$

Проверка:

При подстановке в изначальную систему уравнений получаем:

-1+2+0 = -1; -3+4-0=1; -4+6-0=2; -5+8+0=3

Во втором случае:

при наборе α≠-5, β=3 и α= - $\frac{33}{5}$; система не совместна.

при наборе α≠-5, β=3 и α≠ - $\frac{33}{5}$; система совместна и имеет одно решение.

Подставим с систему уравнений коэффициенты, получившиеся после элементарных преобразований матрицы

$x_2 + 8x_3 = 2$; $x_1 + 5x_3 = 1$; $(\alpha + 5)x_1 - 8x_3 = 0$;

$x_2 = 2 - 8x_3$; $x_1 = 1 - 5x_3$; $x_3 = \frac{(\alpha+5)x1}{8}$;

$x_2 = 2 - 8*\frac{\alpha+5}{33+5\alpha}$; $x_1 = 1 - 5*\frac{(\alpha+5)x1}{8}$; $x_3 = \frac{(\alpha+5)8}{8(33+5\alpha)}$;

$x_1 = \frac{8}{33+5\alpha}$; $x_2 = \frac{2\alpha+26}{33+5\alpha}$; $x_3 = \frac{\alpha+5}{33+5\alpha}$;

При $\alpha = 3$

$x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{1}{6}$

Проверка:

При подстановке в изначальную систему уравнений получаем

$-\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = 1; -\frac{3}{6} + \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 1; -\frac{4}{6} + \frac{12}{6} + \frac{4}{6} = 2; \frac{3}{6} + \frac{16}{6} - \frac{1}{6} = 3$

В третьем случае система совместна и имеет одно решение:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$

Проверка:

При подстановке в изначальную систему уравнений получаем:

-1+2+0 = 1; -3+4-0=1 ; -4+6-0=2; -5+8+0=3

Заключение

В данной задаче были найдены решения системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от параметров α и β. В ходе решения задачи использовалась теорема Кронекера - Капелли, а так же были рассмотрены понятия ранга и минора матрицы. Обнаружилось три случая совместности системы:

1. При $\alpha=-5$ и $\beta\neq3$ решением является $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$
2. При $\alpha\neq-5$; $\beta=3$ и $\alpha\neq -\frac{33}{5}$ решением является
   $x_1 = \frac{8}{33+5\alpha}$; $x_2 = \frac{2\alpha+26}{33+5\alpha}$; $x_3 = \frac{\alpha+5}{33+5\alpha}$;
3. При $\alpha=-5$ и $\beta=3$ решением является $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$

И два случая, когда системы не совместны:

1. При $\alpha\neq-5$; $\beta=3$ и $\alpha= -\frac{33}{5}$
2. При $\alpha\neq-5$ и $\beta\neq3$

Список литературы:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. – 432 стр.
2. Рыбаков М.Н. Лекции