МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики

Направление 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии

 Профиль подготовки «Информатика и компьютерные науки»

Отчет по итогам учебной практики по получению первичных профессиональных умений и навыков

2017-2018 уч. год, 5 семестр

 **Автор**: студент 3 курса

 Баранов Кирилл Сергеевич

 **Руководители практики**:

 к.ф.-м.н.

 Солдатенко Илья Сергеевич

 к.ф.-м.н.

 Сидорова Оксана Игоревна

 **Оценка**: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

 Тверь – 2017

**Содержание**

[I. Теория вероятностей и математическая статистика 3](#_Toc501931300)

[Теоретическая часть 3](#_Toc501931301)

[Практическая часть 11](#_Toc501931302)

[II. Функциональное программирование 20](#_Toc501931303)

[1. Общие задания 20](#_Toc501931304)

[2. Индивидуальные задания 23](#_Toc501931305)

[Список использованной литературы 27](#_Toc501931306)

# I. Теория вероятностей и математическая статистика

## Теоретическая часть

Генерация случайных чисел нормального распределения происходит с помощью встроенного в EXCEL языка программирования VBA. Для этого используется преобразование Бокса-Мюллера, идея которого в том, что генерируются два числа и из равномерного распределения, проверяется, что они находятся в единичном круге: . Если они подходят, то вычисляются величины и и возвращается . Таким образом происходит автоматическая генерация повторной выборки.

**Построение вариационных рядов** происходит в области промежуточных вычислений, так как вариационные ряды нужны для формирования интервалов гистограммы.

**Основные выборочные характеристики** рассчитываются по следующим формулам:

|  |  |
| --- | --- |
| Выборочное среднее: |  |
| Выборочная дисперсия: |  |
| Исправленная дисперсия: |  |
| Медиана: |  |
| Минимум: |  |
| Максимум: |  |
| Размах: | (7) |
| Коэффициент вариации: |  |
| Коэффициент осцилляции: |  |

**Значения гистограммы** вычисляются по формуле , где – шаг интервала, – количество величин, попавших в интервал .

Для оценки параметров нормального распределения можно использовать метод наибольшего правдоподобия (МНП), который имеет вид: Случайная величина имеет распределение с параметрами и : .

Плотность нормального распределения:

Пусть – повторная выборка. Тогда построим функцию правдоподобия:

Прологарифмируем ее, так как максимум функции и логарифма от нее будет достигаться в одной и той же точке:

Взяв производные по каждому параметру, составим систему уравнений:

Таким образом, доказано, что метод моментов и МНП дают одинаковые оценки для параметров нормального распределения.

Для оценки функции распределения используют **эмпирическую функцию распределения**: , где – число элементов выборки , для которых верно .

**Доверительный интервал для среднего при известной дисперсии** строится по следующему правилу:

где определяется по таблицам стандартного нормального распределения.

**Доверительный интервал для среднего при неизвестной дисперсии** получается при помощи формулы:

где определяется по таблицам распределения Стьюдента для степени свободы.

**Доверительный интервал для дисперсии** строится по правилу:

где и – константы из таблицы -распределения с степенью свободы.

**Проверка гипотезы о согласии** полученных данных с нормальным распределением , где – функция распределения нормального закона с параметрами и выполняется следующим образом:

1. Вычисляем **теоретические вероятности** попадания случайной величины в интервалы , воспользовавшись оценками максимального правдоподобия для неизвестных параметров:

где – функция распределения стандартного нормального закона.

2. **Статистика критерия** будет равна:

3. **Группировка** включает в себя интервалов, по выборке оценивается параметров, следовательно имеем степеней свободы. По таблицам -распределения для заданного находим критическую точку. Если критическая точка больше, чем найденное значение, то гипотеза о согласии не отвергается на заданном уровне значимости.

Проверка **гипотезы об однородности** двух имеющихся наборов наблюдений, т.е. , где и – функции распределения соответствующие выборкам и .

Предварительно сгруппируем значения обеих выборок в одну таблицу по интервалам и вычислим статистику критерия:

где и .

По таблицам -распределения для заданного уровня находим критическую точку и если , то гипотеза не отвергается.

Для проверки **гипотезы о среднем**: статистика критерия вычисляется по следующей формуле:

По таблицам распределения Стьюдента для заданного и степеней свободы находим критическую константу . Если , то гипотеза не противоречит исходным данным.

Для проверки **гипотезы о дисперсии**: статистика критерия вычисляется по следующей формуле:

По таблицам -распределения для заданного и степеней свободы находим критические константы и . Если найденное значение входит в интервал между критическими константами, то следует признать, что гипотеза не противоречит исходным данным.

Для проверки **гипотезы о равенстве средних**: статистика критерия вычисляется по следующей формуле:

По таблицам распределения Стьюдента для заданного уровня и степеней свободы находим критическую константу . Если выполняется неравенство , то гипотеза не противоречит исходным данным.

Для проверки **гипотезы о равенстве дисперсий**: статистика критерия вычисляется по следующей формуле:

По таблицам распределения Фишера для заданного уровня и степенью свободы находим критические константы и . Если расчётное значение входит в интервал между критическими константами, то гипотеза считается не противоречивой исходным данным.

**Анализ корреляционных связей** выборок производится в несколько этапов:

1. Строится точечная оценка коэффициента корреляции по формуле:

2. Доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид:

3. Проверка гипотезы о некоррелированности признаков и :
. Заметим, что для нормальных случайных величин проверяемая гипотеза также является гипотезой о независимости. Статистика критерия вычисляется по формуле:

По таблицам распределения Стьюдента по заданному уровню и степеней свободы находим критическую константу . Если , то гипотеза не противоречит и линейной связи между выборками нет.

**Анализ биномиальных вероятностей** также проводится в несколько этапов. Предварительно нужно вычислить величину , где в качестве и выступают выборочные параметры распределения. Затем нужно посчитать вероятность события для каждой из двух выборок. Получим значения и .

1. Расчет **точечных оценок вероятностей** успеха имеет вид:

Заметим, что согласно нормальному закону распределения в интервал значений должно попадать значений.

2. **Доверительное оценивание вероятности** производится по формуле Вальда:

где константа определяется по таблицам стандартного нормального распределения для заданного уровня .

3. **Доверительный интервал** для величины при равных объемах выборок строится по плану:

где константа определяется по таблицам стандартного нормального распределения для заданного уровня .

4. Проверим гипотезу: . Статистика критерия равна:

По таблице стандартного нормального распределения по заданному уровню определяем константу . Если , то гипотеза не противоречит исходным данным.

5. Проверка гипотезы заключается в определении статистики критерия по формуле:

По таблице стандартного нормального распределения по заданному уровню определяем константу . Если , то гипотеза не противоречит исходным данным. Таким образом, подтверждается однородность двух совокупностей в терминах вероятностей.

## Практическая часть

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер варианта | ФИО | Параметры |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Баранов Кирилл Сергеевич |  |  |  |  |  |  |  |  |

Выполнение задания начинается с генерации двух повторных выборок объёма 100 из нормального распределения с параметрами . Затем из этих выборок были построены вариационные ряды:

Первый вариационный ряд:



Второй вариационный ряд:



**1 задание.** Найти для каждой выборки выборочные среднее значение, дисперсию, медиану, экстремальные значения, размах выборки, коэффициенты вариации и осцилляции.

С помощью формул 1 – 9 были выполнены расчеты параметров. Результаты представлены в таблице далее:

****

**2 задание.** Для первой выборки построить график эмпирической функции распределения и гистограмму. Сгладить гистограмму с помочью плотности нормального распределения, предварительно оценив его параметры по МНП.

Для построения гистограммы требуется вариационный ряд разделить на интервалы, количество которых было определено по формуле Стерджесса: и оно равно . Так как размах выборки равен , это значит, что шагом будет величина . Также посчитаем сколько элементов выборки попало в каждый из интервалов , откуда получим величину вероятности . Для сглаживания выполним расчет середины каждого из интервалов и значение плотности стандартного нормального распределения .



Построенная по таблице гистограмма выглядит следующим образом:

Оценка параметров плотности нормального распределения, графиком которой сглажена гистограммы, приведена в формулах 10 и 11.

Также, по вариационному ряду была построена эмпирическая функция распределения (формула ) и ее график:

**Задание 3.** Для первой выборки построить доверительные интервалы уровня для параметров и нормального распределения:

* для среднего при известной дисперсии;
* для среднего при неизвестной дисперсии;
* для дисперсии.

Расчеты границ интервалов проводились по формулам 14 – 16 и их результаты занесены в таблицу:



**Задание 4.** По критерию на уровне значимости проверить согласие эмпирических данных с нормальным распределением.

Все данные для проверки гипотезы были рассчитаны по формулам 17 и 18, их результаты расположились в следующей таблице:



**Задание 5.** По критерию на уровне значимости проверить однородность 2-х выборок.

Все данные для проверки гипотезы были рассчитаны по формуле 19 и их результаты расположились в следующей таблице:



**Задание 6.** Проверить на уровне значимости гипотезы о значениях параметров нормального распределения:

* против альтернативы ;

По формуле 20 и с помощью таблицы распределения Стьюдента была найдена статистика критерия и критическая константа, из неравенства которых можно сделать вывод о предположенных гипотезах:



* против альтернативы ;

Аналогично, по формуле 21 была рассчитана статистика критерия и результат проверки гипотезы состоит в её сравнении со значением из таблицы -распределения:



* против альтернативы ;

По формуле 22 рассчитана статистика критерия, а из таблицы распределения Стьюдента взята критическая константа. Отсюда и вывод о гипотезе:



* против альтернативы .

Согласно формуле 23 была вычислена статистика критерия, а также из таблицы -распределения взяты критические константы для вывода:



**Задание 7.** Провести корреляционный анализ полученных выборок:

* Построить точечную оценку коэффициента корреляции;

Точечная оценка коэффициента корреляции была получена по формуле 24 и для построенных выборок она равна -0,13049761.

* Построить доверительный интервал уровня для коэффициента корреляции;

Доверительный интервал строился последовательно по формулам 25 – 26 и на основе полученных значений сделан соответствующий вывод:



* На уровне значимости проверить гипотезу против альтернативы .

Пользуясь формулой 27, была найдена статистика критерия и с помощью таблицы стандартного обратного распределения – критическая константа для проверки гипотезы:



**Задание 8.** Провести анализ вероятностей:

* По каждой выборке оценить вероятности и событий
;

Согласно исходным данным, и , тогда и требуется вычислить вероятности события для выборок и . Таким образом, по формуле 28 вычисляем нужные оценки:

**

Заметим, что согласно нормальному закону распределения в интервал значений , где и – теоретические среднее и дисперсия, должно попадать при - наблюдений.

* Построить доверительный интервал уровня для ;
* Построить доверительный интервал уровня для

Построение доверительных интервалов проводилось по формулам 29, 30 и были получены следующие результаты:



Так как последнее неравенство содержит ноль, можно сделать вывод, что вероятности успеха в двух выборках значимо не различаются.

* На уровне значимости проверить гипотезу против альтернативы ;

Расчет проводился по формуле 31и результаты помещены в таблицу:



* На уровне значимости проверить гипотезу против альтернативы .

Расчет статистики критерия производился по формуле 32 и получилось:



# II. Функциональное программирование

## 1. Общие задания

1) Написать функцию diff, вычисляющую производную простого полинома.

(DEFUN diff (l x)

 (COND ((ATOM l) (IF (EQ l x) 1 0))

 ((EQ (CAR l) `+) (LIST `+ (diff (NTH 1 l) x)

 (diff (NTH 2 l) x)))

 ((EQ (CAR l) `\*) (LIST `+ (LIST `\* (diff (NTH 1 l) x)

 (NTH 2 l)) (LIST `\* (diff (NTH 2 l) x) (NTH 1 l))))

 (T l)

 )

)

Примеры работы функции:

 

2) Написать функцию len, вычисляющую длину списка.

(DEFUN len (lst)

 (IF (NULL lst) 0

 (+ 1 (list-length (CDR lst)))

 )

)

Примеры работы функции:

 

3) Написать функцию lst, возвращающую последний элемент списка. Использовать встроенную функцию last нельзя.

(DEFUN lst (lis)

 (COND ((ATOM lis ) 0 )

 ((EQUALP (CDR lis) ()) (CAR lis))

 (T (lst (CDR lis)))

 )

)

Примеры работы функции:

 

4) Написать функцию gcd, возвращающую НОД двух чисел. Примеры запуска программы:

(DEFUN my-gcd (x y)

 (COND

 ((NOT (AND (ATOM x) (ATOM y))) 0)

 ((EQ x y) x)

 ((> x y) (my-gcd (- x y) y))

 ((< x y) (my-gcd x (- y x)))

 (T NIL)

 )

)

Примеры работы функции:

 

5) Привести пример кода, демонстрирующего работу лямбда-функции:

На языке Common Lisp:

(print ((lambda (x y z) (+ (/ x y) (/ x z))) 8 4 2))

На языке C++:

int main() {

 int b = 8, c = 4, d = 2;

 auto a = [](int x, int y, int z) {

 return (x/y + x/z);

 };

 cout << a(b, c, d) << endl;

 return 0;

}

Пример работы функции:



6) Привести пример кода, демонстрирующего работу функций высшего порядка:

На языке Common Lisp:

(DEFUN

 func (x y) (+ (/ x 2) (/ y 2))

)

(PRINT

 (REDUCE #'func `(2 4 6 8 10))

)

На языке C++:

float del(float x, float y) {

 float a = (x / 2. + y / 2.);

 return a;

}

float func(float (f)(float, float), vector<float> &v) {

 float ret = v.at(0);

 for (size\_t i = 1; i < v.size(); ++i) {

 ret = f(ret, v.at(i));

 }

 return ret;

}

int main() {

 vector<float> vect = { 2, 4, 6, 8, 10 };

 cout << func(del, vect) << endl;

 return 0;

}

Пример работы функции:



## 2. Индивидуальные задания

1) Напишите функцию, которая переворачивает список задом наперед.

(DEFUN list-backward-1 (lst prev)

 (COND

 ((EQUAL (CDR lst) ()) (APPEND (LIST (CAR lst)) prev))

 (T (list-backward-1 (CDR lst) (APPEND (LIST (CAR lst)) prev)))

 )

)

(DEFUN list-backward (lst)

 (COND

 ((EQUAL (CDR lst) ()) lst)

 (T (list-backward-1 (CDR lst) (LIST (CAR lst))))

 )

)

Примеры работы функции:

 

2) Напишите функцию, которая транспонирует матрицу. При решении упражнения можно пользоваться функцией из упр. 2, написанной Краав А.В.

; Функции Краав А.В.

(DEFUN k\_el (lis k)

 (COND

 ((ZEROP k) (CAR lis))

 (T (k\_el (cdr lis) (- k 1)))

 )

)

(DEFUN st\_m (lis k)

 (COND

 ((NULL lis) NIL)

 (T (CONS (k\_el (car lis) k) (st\_m (cdr lis) k)))

 )

)

; Длина списка

(DEFUN my-list-length (lst)

 (IF (NULL lst) 0

 (+ 1 (list-length (CDR lst)))

 )

)

; Проверка, что все строки одинаковой длины

(DEFUN str-eq-len-1 (lst str)

 (COND

 ((NULL lst) T)

 ((EQ (my-list-length (CAR lst)) (my-list-length str))

 (str-eq-len (CDR lst) (CAR lst)))

 (T NIL)

 )

)

(DEFUN str-eq-len (lst)

 (IF (> 1 (list-length lst))

 (str-eq-len-1 lst (CAR lst)) T)

)

; Убрать головы всем спискам из списка

(DEFUN rem-head-1 (lst prev)

 (COND

 ((NULL (CDR lst)) (list-backward (CONS (CDR (CAR lst)) prev)))

 (T (rem-head-1 (CDR lst) (CONS (CDR (CAR lst)) prev)))

 )

)

(DEFUN rem-head (lst)

 (rem-head-1 lst ())

)

; Транспонирование матрицы

(DEFUN matrix-transpose-1 (lst prev)

 (COND

 ((EQUALP (CAR lst) NIL) prev)

 (T (matrix-transpose-1 (rem-head lst)

 (CONS (st\_m lst 0) prev)))

 )

)

(DEFUN matrix-transpose (lst)

 (IF (AND (NOT (NULL (CDR lst))) (str-eq-len lst))

 (list-backward (matrix-transpose-1 (rem-head lst)

 (LIST (st\_m lst 0)))

 )

 lst)

)

Пример работы функций:

 

3) Дан список целых чисел. С помощью map отобразите его в список квадратов соответствующих чисел.

#include <list>

#include <algorithm>

#include <iostream>

using namespace std;

int main() {

 std::list<int> list{

 2, 9, -4, 6, -2

 };

 std::list<int> new\_List(list.size(), 0);

 std::transform(list.begin(), list.end(), new\_List.begin(),

[](int x) {

 return x \* x;

 }

);

 cout << "( ";

 for (auto i : list) {

 cout << i << " ";

 }

 cout << ")\n( ";

 for (auto i : new\_List) {

 cout << i << " ";

 }

 cout << ")\n";

 return 0;

}

Пример работы программы:



4) С помощью замыкания напишите генератор чисел Фибоначчи.

auto fibGen() {

 int a = 0;

 int b = 0;

 return [=]() mutable {

 int c = a + b;

 if (c == 0) c = 1;

 a = b;

 b = c;

 return c;

 };

}

int main() {

 auto f = fibGen();

 auto g = fibGen();

 for (int i = 0; i < 10; i++) {

 cout << f() << "\t\t" << g() << "\n";

 }

 return 0;

}

Пример работы программы:



# Список использованной литературы

1. Хохлов Ю.С., Сидорова О.И., Захарова И.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет». – Тверь: Тверской государственный университет, 2014.

2. Хохлов Ю.С., Сидорова О.И., Захарова И.В. Классическая вероятность. Комбинаторика: Практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», часть 1. – ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет». – Тверь: Тверской государственный университет, 2016.

3. Хохлов Ю.С., Сидорова О.И., Захарова И.В. Условная вероятность. Схема Бернулли: Практикум по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», часть 2. – ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет». – Тверь: Тверской государственный университет, 2016.

4. MS EXCEL для новичков и профессионалов. Сайт EXCEL2.RU

http://excel2.ru/

5. Э. Хювёнен, И.Септянен Мир лиспа. Т.1: Введение в язык лисп и функциональное программирование.

6. Lisp.Ru - Русскоязычное сообщество лисперов

http://lisp.ru/